



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELL'INSUBRIA
DIPARTIMENTO DI SCIENZA E ALTA TECNOLOGIA
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

**STUDIO GEOMETRICO
DELL'UNIVERSO
DI ANTI-DE SITTER**

Relatore:

Prof. Ugo MOSCHELLA

Correlatore:

Dott. Sergio L. CACCIATORI

Candidato:

Nadir FASOLA

N. di Matricola: 716138

06 Ottobre 2016
Anno Accademico 2015/2016

Indice

Premessa	iii
Notazione e convenzioni	vii
1 Lo spazio di Anti-de Sitter X_d	1
1.1 Lo spaziotempo di Anti-de Sitter X_d	1
1.2 Geodetiche e onde piane	3
1.3 Geodetiche su X_d	6
1.4 Onde piane su X_d	15
1.5 Compattificazione, iperbolicità globale	19
2 QFT su spazi curvi	26
2.1 QFT su spazio di Minkowski: CCR	26
2.2 Funzioni di Green	32
2.3 Quantizzazione su spazi curvi	35
2.3.1 Proprietà globali dello spaziotempo: iperbolicità	35
2.3.2 Proprietà globali dello spaziotempo: simmetrie	36
2.3.3 Unicità del vuoto e trasformazioni di Bogolyubov	38
2.4 Approccio assiomatico alla QFT	41
2.4.1 Approccio algebrico alla Meccanica Quantistica	42
2.4.2 Passaggio alla QFT	50
2.4.3 Approccio algebrico e assiomi di Wightman	55
2.5 Spazi curvi: F -località	74
2.5.1 Un caso particolare: X_d	75
3 QFT su X_d	77
3.1 Anti-de Sitter	77
3.2 Tuboidi chirali	78
3.3 Funzioni di Gegenbauer	84
3.4 QFT su Anti-de Sitter	89
3.5 Campo scalare su X_d	93
Covarianza	95
Località	95
Condizione spettrale	95
Positività	96
3.6 Trasformazione di Fourier su X_d	104
4 Un'applicazione: decadimenti e vite medie	109
4.1 Funzioni a due punti: forma di Källen-Lehmann	109
4.2 Campi interagenti e decadimenti	111
4.3 Tassi di decadimento su M_d	114
4.4 Tassi di decadimento su X_d	116
Conclusioni	121

Premessa

L'interesse nutrito nei confronti dello studio della geometria e delle corrispondenti teorie di campo sull'Universo di Anti-de Sitter ha subito recentemente un notevole incremento, nonostante le sue proprietà possano farlo apparire come un cattivo candidato per la formulazione di teorie fisiche.

Infatti, se da una parte l'Universo di Anti-de Sitter X_d emerge come una delle più semplici soluzioni alle equazioni di Einstein della Relatività Generale (è infatti uno dei due spazi omogenei massimamente simmetrici che si ottengono risolvendo le equazioni con costante cosmologica non nulla, [48][49], dall'altra risulta essere affetto da patologie che ne rendono l'applicazione in fisica, e soprattutto l'interpretazione, quantomeno difficoltosa. Tale problematicità emerge in particolare dalla caratteristica di X_d di non essere uno spaziotempo globalmente iperbolico. Dal punto di vista della geometria questo si manifesta in due maniere differenti: l'esistenza di curve temporali chiuse (e infatti tutte le geodetiche temporali su X_d risultano essere chiuse) e l'esistenza di una frontiera all'infinito spaziale (nel senso della compattificazione di X_d). L'inesistenza di una superficie di Cauchy compatta fa anche sì che i problemi ai valori iniziali su X_d non risultino ben definiti. Se tuttavia l'esistenza di curve temporali chiuse può essere risolta passando al ricoprimento universale \tilde{X}_d di X_d , l'impossibilità di definire i problemi di Cauchy in maniera coerente impedisce anche lo sviluppo delle teorie di campo sullo spaziotempo di Anti-de Sitter. Nell'ambito delle teorie quantistiche di campo questo impedisce *in toto* la quantizzazione canonica, siccome può manifestarsi dell'informazione proveniente dall'infinito spaziale. Come soluzione a tale problema è stato proposto di utilizzare l'embedding conforme di X_d nell'universo statico di Einstein

(globalmente iperbolico) in maniera tale da definire una certa classe di condizioni al bordo, che rendano la QFT su X_d ben definita, [2]. Tale procedura risulta tuttavia alquanto limitata nella sua complessità e sembra essere preferibile ricorrere ad altri metodi.

Nonostante tutte queste difficoltà, lo studio di teorie quantistiche ambientate su X_d è proliferato nei decenni più recenti in virtù di due principali motivazioni, [39][45][46]. L'universo di Anti-de Sitter garantisce infatti l'accesso a teorie non banali sullo spazio di Minkowski per mezzo della dualità AdS/CFT [45], che congettura la corrispondenza tra teorie su X_d e teorie conformi sul bordo all'infinito spaziale. In questo modo è possibile costruire teorie su \mathbb{M}_d per mezzo di modelli su un universo di Anti-de Sitter di dimensione maggiore. Inoltre, è possibile interpretare X_d come una regolarizzazione covariante (nell'infrarosso) dello spaziotempo di Minkowski, [16]. In questo senso è possibile ottenere una teoria di campo in \mathbb{M}_d a partire da una su X_d nel limite di spazio piatto.

Il presente lavoro di tesi si concentra allora sullo studio di alcune proprietà geometriche dell'universo di Anti-de Sitter, e sulla loro applicazione nell'ambito di una teoria quantistica di campo scalare, formulata secondo una generalizzazione dell'approccio assiomatico dovuto a Wightman, [7][8][10][15]. Il lavoro è strutturato come segue:

Capitolo 1 Si introduce lo spaziotempo di Anti-de Sitter X_d come soluzione massimamente simmetrica e omogenea delle equazioni di Einstein per la Relatività Generale e come iperboloide immerso in $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$. La presentazione della connessione esistente tra teorie quantistiche di campo scalare nel limite classico e geodetiche su una varietà motiva lo studio delle geodetiche su X_d e delle onde piane, soluzioni su X_d dell'equazione di Klein-Gordon. Infine sono investigate ulteriori proprietà globali di X_d tramite l'introduzione delle sue principali parametrizzazioni e della compattificazione di X_d nell'universo statico di Einstein.

Capitolo 2 È dapprima presentata la procedura di quantizzazione canonica per teorie di campo su spazi curvi, e ne sono evidenziate le principali debolezze, evidenziando al contempo il ruolo giocato nella quantizzazioni dei campi dalle proprietà globali dello spaziotempo. In seguito ad una motivazione dell'approccio assiomatico alla meccanica quantistica, è quindi presentato l'approccio algebrico alla QFT su spaziotempo di Minkowski, e la sua realizzazione negli assiomi di Wightman, sia nella formulazione per i campi sia in quella per le funzioni a n punti. In seguito sono dimostrati i principali risultati relativi alle proprietà delle funzioni di Wightman. La condizione di compatibilità quantistica, o F -località, per uno spaziotempo generico (non necessariamente globalmente iperbolico) illustra infine una proposta di soluzione circa le difficoltà di interpretazione delle teorie di campo su spazi curvi.

Capitolo 3 In questo capitolo è affrontata la formulazione delle teorie di campo scalare su X_d seguendo una generalizzazione dell'approccio assiomatico di Wightman. Sono dimostrate alcune proprietà geometriche relative alla complessificazione $X_d^{(C)}$ di X_d , che risultano particolarmente utili per la caratterizzazione delle funzioni a due punti dei campi scalari. È quindi introdotta una nuova rappresentazione integrale per le funzioni associate di Legendre del secondo tipo o, equivalentemente, per le funzioni di Gegenbauer del secondo tipo. Tale rappresentazione integrale è poi proposta come funzione a due punti per i campi scalari liberi (generalizzati) su X_d , e le condizioni imposte dagli assiomi di Wightman sono verificate. La dimostrazione della positività, non immediata, fa uso di una rappresentazione integrale per la quantità invariante $(x, \xi)^l$. Questo permette infine di definire in maniera naturale una trasformazione di tipo Fourier su X_d , e di dimostrarne alcune proprietà, analoghe a quelle soddisfatte dalla trasformazione di Fourier standard su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Capitolo 4 L'ultimo capitolo del lavoro di tesi presenta un'applicazione della formulazione assiomatica della QFT su X_d . Un'identità di proiezione analoga a quella esistente per le funzioni a due punti di campi scalari su \mathbb{M}_d è dimostrata utilizzando la rappresentazione integrale per $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$. Questa, assieme alla rappresentazione di Källén-Lehmann per il prodotto di due funzioni a due punti [15], è utilizzata per il calcolo della vita media di una particella su X_d , ed è sottolineato come la condizione spettrale imposta sulle funzioni di Wightman in X_d sia la traduzione di una vera e propria richiesta di positività dell'energia.¹

Notazione e convenzioni

\mathcal{M}	Varietà differenziabile generica
$\mathfrak{g}(\cdot, \cdot), g_{\mu\nu}$	Metrica (pseudo)riemanniana su una varietà \mathcal{M}
(\cdot, \cdot)	Prodotto scalare
$T_p\mathcal{M}$	Spazio tangente al punto $p \in \mathcal{M}$
$T_p^*\mathcal{M}$	Spazio cotangente al punto $p \in \mathcal{M}$
$T\mathcal{M}$	Fibrato tangente alla varietà \mathcal{M}
$T^*\mathcal{M}$	Fibrato cotangente alla varietà \mathcal{M}
$t^a\nabla_a, \nabla_{\mathbf{t}}$	Operatore di derivata covariante nella direzione del vettore \mathbf{t}
$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{w}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$	Derivata di Lie del vettore \mathbf{w} in direzione del vettore \mathbf{v}
$R_{abc}{}^d, R_{abcd}$	Tensore di curvatura di Riemann
R_{ab}	Tensore di Ricci
$R, R_a{}^a$	Curvatura scalare
$I^\pm(p)$	Futuro (passato) cronologico di un punto $p \in \mathcal{M}$.
$J^\pm(p)$	Futuro (passato) causale di un punto $p \in \mathcal{M}$
$D^\pm(p)$	Dominio di dipendenza futuro (passato) di un punto $p \in \mathcal{M}$
$A_{(ab)}$	Simmetrizzazione totale degli indici di A
$A_{[ab]}$	Antisimmetrizzazione totale degli indici di A
$\text{int } S$	Interno dell'insieme S
∂S	Frontiera dell'insieme S
$\text{cl } S$	Chiusura dell'insieme S

\mathbb{M}_d	Spazio di Minkowski d -dimensionale
$\mathbb{R}^{(p,q)}$	Spazio vettoriale reale con metrica di segnatura $p - q$
$\mathbb{C}^{(p,q)}$	Complessificazione di $\mathbb{R}^{(p,q)}$
X_d	Spazio di Anti-de Sitter d -dimensionale
$X_d^{(C)}$	Complessificazione di X_d
C	Cono asintotico a X_d in $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$
$C^{(C)}$	Complessificazione di C
T^\pm	Tubo futuro/passato di base \mathbb{M}_d
\mathcal{T}^\pm	Tuboidi chirali su $X_d^{(C)}$
$\mathcal{T}^\pm \times \mathcal{T}^\mp$	Prodotto cartesiano $\mathcal{T}^\pm \times \mathcal{T}^\mp$
Θ_χ	Piano tagliato $\Theta_\chi = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$
\mathcal{H}	Spazio di Hilbert
\mathcal{F}	Spazio di Fock
Ψ_0	Stato di vuoto $\Psi_0 \in \mathcal{H}$
\mathcal{B}	Algebra di Borchers delle successioni finite di funzioni
W	Funzionale di Wightman sull'algebra di Borchers \mathcal{B}
$w_2^{(m)}(x_1, \dots, x_n)$	Funzione a due punti per il campo scalare libero di massa m su \mathbb{M}_d
$w_2^{(l)}(x_1, \dots, x_n)$	Funzione a due punti per il campo scalare libero in X_d di indice l
$\text{bv } f(z)$	Valore al bordo in senso distribuzionale di f : $\lim_{z \rightarrow x} f(z)$, con z nel dominio D di f
$SO(p, q)$	Gruppo pseudo-ortogonale speciale delle trasformazioni che preservano il prodotto scalare $(x, y) = x^0 y^0 + \dots + x^p y^p - x^{p+1} y^{p+1} - \dots - x^{p+q} y^{p+q}$ in \mathbb{R}^{p+q}
$SO_0(p, q)$	Componente connessa all'identità di $SO(p, q)$
$\Gamma(z)$	Funzione gamma
$Q_\mu^\nu(z)$	Funzione associata di Lagrange del secondo tipo

$D_\mu^\nu(z)$

Funzione di Gegenbauer del secondo tipo

Sarà utilizzata la convenzione di Einstein per la somma su indici ripetuti. Indici greci $\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots$ staranno ad indicare le componenti di un tensore in un dato sistema di riferimento. Qualora siano utilizzati indici latini i, k, l, \dots , questi indicheranno le componenti spaziali 1, 2, 3 di un tensore in un sistema di riferimento. Si converrà invece di indicare, ove possibile, le relazioni tensoriali nella convenzione senza indici.

Lo spazio di Anti-de Sitter X_d

1.1 Lo spaziotempo di Anti-de Sitter X_d

Lo spazio di Anti-de Sitter in d dimensioni, che indicheremo con X_d , è uno spazio massimamente simmetrico, soluzione delle equazioni di Einstein della relatività generale (1.1).

$$\left(R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}\right) + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (1.1)$$

L'equazione (1.1) può essere riscritta in maniera equivalente nella forma (1.2).

$$R_{ab} = 8\pi \left(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab}\right) + \Lambda g_{ab} \quad (1.2)$$

Nel caso di costante cosmologica nulla, le equazioni di Einstein nel vuoto hanno come soluzione lo spazio di Minkowski. Se, invece, la costante cosmologica è $\Lambda \neq 0$, le equazioni di Einstein nel vuoto ($T = 0$) danno luogo agli spazi di de Sitter e Anti-de Sitter in dipendenza dal segno della costante cosmologica, rispettivamente $\Lambda > 0$ e $\Lambda < 0$.

In effetti, gli spazi con curvatura costante sono localmente definiti dall'identità $R_{abcd} = R(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})/12$, che è equivalente a $C_{abcd} = 0 = R_{ab} - Rg_{ab}/4$. Notiamo pertanto che il tensore di Einstein assume la forma $R_{ab} - Rg_{ab}/2 = -Rg_{ab}/4$. Questo ci suggerisce allora che possiamo identificare simili spazi con le soluzioni delle equazioni di Einstein (1.1) nel vuoto con costante cosmologica $\Lambda = R/4$. Pertanto, se poniamo $R = 0$ otteniamo lo spazio di Minkowski, se $R > 0$ lo spazio di

de-Sitter, se, infine, $R < 0$ abbiamo lo spazio di Anti-de Sitter. Localmente, X_d ha la topologia di $S^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$ e appartiene ad una classe di spazi omogenei che possono essere definiti come quadriche in uno spazio vettoriale piatto. In particolare

$$X_d = \{x \in \mathbb{R}^{(2,d-1)} : x^2 = R^2\} \quad (1.3)$$

dove x^2 indica il prodotto (x, x) , secondo la metrica $g_{ab} = \text{diag}(+1, -1, \dots, -1, +1)$, che, come nel caso del prodotto scalare in \mathbb{M}_{d+1} , è non degenera ma non definita positiva. In questo modo lo spazio di Anti-de Sitter X_d risulta invariante sotto l'azione del gruppo di simmetria dello spazio ambiente $G = SO(2, d-1)$, la cui componente connessa con l'identità è $G_0 = SO_0(2, d-1)$. Siccome $SO(2, d-1)$ ha dimensione $d(d+1)/2$ e i suoi generatori formano un insieme massimale di vettori di Killing per X_d , questo risulta massimamente simmetrico. Utilizzando tali definizioni $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$ non è uno spaziotempo, mentre lo è X_d . Il cono di luce $\mathbb{R}^{(2,d-1)} \supset C = \{x \in \mathbb{R}^{(2,d-1)} : x^2 = 0\}$ induce allora l'ordinamento causale su X_d , e, se definiamo il cono di luce di un punto $\xi \in \mathbb{R}^{(2,d-1)}$ tramite $C(\xi) = \{x \in \mathbb{R}^{(2,d-1)} : (\xi - x)^2 = 0\}$, l'insieme dei punti in relazione causale con ξ sarà $J(\xi) = \{x \in \mathbb{R}^{(2,d-1)} : (\xi - x)^2 > 0\} \cup C(\xi)$. Tuttavia, nonostante sia possibile dotare X_d di un ordinamento causale, non è possibile definirvi un ordinamento temporale globale in virtù dell'esistenza di curve temporali chiuse. In ogni caso, X_d risulta essere uno spaziotempo temporalmente orientabile. Quest'ultimo aspetto, in effetti, è di fondamentale importanza per la possibilità di costruire teorie quantistiche di campo su X_d . La visualizzazione di X_d come un'(iper)superficie immersa in $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$ può condurre a ritenere che l'intersezione $X_d \cap \pi$ con il piano π perpendicolare alle direzioni spaziali $\pi = \{x \in \mathbb{R}^{(2,d-1)} : x = (x^0, \mathbf{0}, x^d)\}$ sia una regione privilegiata di X_d . Tuttavia X_d è uno spazio massimamente simmetrico (da cui la curvatura nulla) e omogeneo: l'apparenza particolare risulta essere un artificio dell'embedding di X_d in $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$.

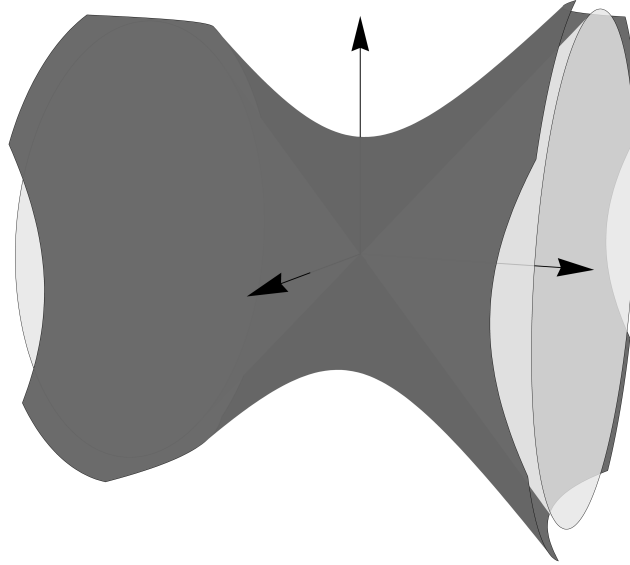


FIGURA 1.1. *Spazio di Anti de-Sitter X_d , assieme al cono di luce C , immerso in $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$*

1.2 Geodetiche e onde piane

È noto che le geodetiche rappresentino i moti naturali di un sistema classico, e questa affermazione risulta semplice da verificare a partire da un principio d'azione. Sappiamo infatti che, in meccanica relativistica, il funzionale d'azione per una particella libera e neutra prende la forma (1.4).¹

$$S[\gamma] = -mc \int ds \quad (1.4)$$

In (1.4) ds indica la quantità invariante $\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\mu\dot{\gamma}^\nu}d\tau$, dove con τ denotiamo una qualunque scelta di parametrizzazione per la curva γ (e l'azione è in effetti indipendente dalla scelta della particolare parametrizzazione adottata). In questo modo i moti del sistema descritto dall'azione (1.4) sono le curve estremali della lunghezza spaziotemporale (la cui definizione è indotta dalla metrica g sullo spaziotempo \mathcal{M})

¹Conveniamo, in questa sezione, di reintrodurre le costanti fisiche c e \hbar , in modo da rendere più chiara l'interpretazione fisica della corrispondenza tra geodetiche e onde piane.

e, come tali, sono effettivamente geodetiche.

D'altra parte, se vogliamo costruire una teoria quantistica di un campo scalare, questa sarà descritta da un'equazione di Klein-Gordon, la cui azione, su uno spaziotempo curvo, sarà della forma (1.5)

$$S[\phi] = \int d^d x \left[(\nabla^\mu \phi)(x) (\nabla_\mu \phi)(x) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^2(x) \right] \quad (1.5)$$

dove ∇_μ indica la derivata covariante indotta in maniera naturale dalla connessione associata alla metrica \mathbf{g} . Come vedremo nella sezione 2.3.3 la scelta (1.5) non è la più generale possibile, ma realizza unicamente il caso di accoppiamento minimale.

Ora, la connessione esistente tra le geodetiche su uno spaziotempo curvo e l'equazione di Klein-Gordon sul medesimo spazio è concretizzata per mezzo dell'approssimazione iconale di una teoria quantistica, ovvero la realizzazione della teoria nel limite $\hbar \rightarrow 0$. Per rendere esplicito tale procedimento prendiamo la funzione d'onda $\phi(x)$ nella forma $\phi(x) = \exp[i\psi(x)/\hbar]$. La fase $\psi(x)$ della funzione d'onda può essere effettivamente interpretata come l'analogo dell'iconale nel caso del passaggio dall'ottica ondulatoria all'ottica geometrica.

Dunque, sostituendo una simile posizione nell'azione (1.5) e calcolando le equazioni di Eulero-Lagrange per il campo $\phi(x)$, otteniamo l'equazione (1.6).

$$-\partial_\mu \psi(x) \partial^\mu \psi(x) + m^2 c^2 = i\hbar \nabla_\mu [\partial^\mu \psi(x)] \quad (1.6)$$

L'approssimazione iconale si ottiene allora trascurando il termine a destra del segno di uguaglianza in (1.6), ovvero prendendo il limite $\hbar \rightarrow 0$. Operando in tal maniera troviamo che l'iconale $\psi(x)$ soddisfa una equazione puramente classica, (1.7).

$$-g_{\mu\nu} \partial^\mu \psi(x) \partial^\nu \psi(x) + m^2 c^2 = 0 \quad (1.7)$$

Nell'equazione (1.7) possiamo riconoscere immediatamente l'equazione relativistica

di Hamilton-Jacobi della meccanica classica. È noto che la soluzione di questa equazione possa essere riscritta, in virtù del principio di Maupertuis, nella forma (1.8)

$$\psi(x) = \int p_\mu dx^\mu \quad (1.8)$$

dove si intende che l'integrale rappresenti l'azione calcolata sul particolare cammino che la rende estrema. Così otteniamo $\partial^\mu \psi(x) = p^\mu$, e questo può essere identificato con il momento di una particella di massa m , $p^\mu = mc(dx^\mu/d\tau)$, dal momento che p^μ soddisfa la relazione energia-momento nella forma usuale:

$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = 0 \quad (1.9)$$

Infine, una differenziazione covariante ci permette di ottenere l'equazione delle geodetiche per una particella massiva, equazione (1.10).

$$p^\mu \nabla_\mu p^\nu = 0 \quad (1.10)$$

Alternativamente, avremmo anche potuto scrivere la soluzione di (1.7) nella forma (1.11), dove di nuovo si intende di calcolare l'azione lungo le curve che la estremizzano, in modo da rendere maggiormente evidente la connessione esistente tra il campo di Klein-Gordon nell'approssimazione iconale e le traiettorie classiche. Proseguendo in analogia con l'ottica, i “raggi” quantistici relativi ad un campo di Klein-Gordon di massa m , nell'approssimazione classica $\hbar \rightarrow 0$, seguono i movimenti classici di una particella di massa eguale, ovvero le geodetiche.

$$\psi(x) = -mc \int ds \quad (1.11)$$

Date queste osservazioni, è chiara l'utilità dello studio delle geodetiche e delle soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon nel caso di uno spaziotempo curvo, e, nel caso in esame, nello spaziotempo di Anti-de Sitter X_d .

1.3 Geodetiche su X_d

Il vantaggio principale nell'utilizzare l'embedding di X_d in $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$ consiste in una notevole semplificazione di molti dei calcoli che possono essere svolti in questo modo su X_d . Consideriamo, per esempio, le geodetiche su X_d . Se indichiamo con \dot{x} una derivata, le geodetiche di X_d possono essere ottenute a partire dalla lagrangiana (1.12)

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \lambda(x^2 - 1) \quad (1.12)$$

dove il moltiplicatore di Lagrange λ ci assicura che la curva ottenuta tramite le equazioni di Eulero-Lagrange per L giaccia su X_d . La forma di L ci garantisce l'esistenza di un tensore conservato $k_{\mu\nu}$.

$$k_{\mu\nu} = x_\mu \dot{x}_\nu - x_\nu \dot{x}_\mu$$

Evidentemente la contrazione di $k_{\mu\nu}$ con se stesso soddisfa la relazione seguente

$$\begin{aligned} k_{\mu\nu}k^{\mu\nu} &= (x_\mu \dot{x}_\nu - x_\nu \dot{x}_\mu)(x^\mu \dot{x}^\nu - x^\nu \dot{x}^\mu) \\ &= 2\dot{x}^2 - 2x_\nu \dot{x}^\nu x_\mu \dot{x}^\mu \\ &= 2\dot{x}^2 \end{aligned}$$

dal momento che, indicando con τ un parametro lungo la geodetica, si ha $2x_\mu \dot{x}^\mu = d(x^2)/d\tau$ e $x^2 = 1$ su X_d . Inoltre la proprietà di antisimmetria $k_{(\mu\nu)} = 0$ ci assicura che $k_{[\mu\nu}k_{\rho\sigma]} = 0$. La geodetica definente $k_{\mu\nu}$ sarà inoltre temporale, spaziale o nulla, in base al segno di $k^2 = k_{\mu\nu}k^{\mu\nu}$ (rispettivamente positivo, negativo o nullo). Vicendevolmente, se abbiamo un tensore $k_{\mu\nu}$ antisimmetrico che soddisfi le condizioni precedenti, questo definisce una geodetica temporale, spaziale o nulla in base al segno di k^2 . La forma di $k_{\mu\nu}$ ci permette inoltre di dimostrare le relazioni

seguenti

$$\begin{aligned} k_{\mu\nu}\dot{x}^\nu &= x_\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\nu - \dot{x}^2\dot{x}_\mu \\ &= -\dot{x}_\mu \end{aligned} \tag{1.13a}$$

$$\begin{aligned} k_{\mu\nu}\dot{x}^\nu &= x_\mu\dot{x}^2 - \dot{x}_\mu x_\nu\dot{x}^\nu \\ &= \dot{x}^2 x_\mu \end{aligned} \tag{1.13b}$$

da cui otteniamo immediatamente la forma (1.14) per l'equazione delle geodetiche.

$$\ddot{x}_\mu = -\dot{x}^2 x_\mu \tag{1.14}$$

Dal momento che, infine, \dot{x}^2 è una quantità conservata, l'equazione (1.14) può essere risolta in maniera semplice. In particolare, le geodetiche nulle soddisfano $\ddot{x}_\mu = 0$ e, nello spazio ambiente, sono linee rette. Nel caso in cui \dot{x}^2 non sia nullo, possiamo studiare separatamente i casi di geodetiche temporali o spaziali. Se $\dot{x}^2 < 0$ abbiamo a che fare con geodetiche spaziali, e la soluzione assume la forma semplice riportata in equazione (1.15).

$$x_\mu(\tau) = \xi_\mu e^{-\sqrt{|\dot{x}^2|\tau} + \eta_\nu e^{\sqrt{|\dot{x}^2|\tau}} \tag{1.15}$$

Il fatto che \dot{x}^2 sia una quantità conservata e che $x^2 = 1$, ovvero $x(\tau) \in X_d, \forall \tau$, implicano che $\xi^2 = \eta^2 = 0$ e $2(\xi, \eta) = 1$.

Se, invece, la geodetica è temporale, ovvero $\dot{x}^2 > 0$, allora la soluzione di (1.14), assume la forma seguente.

$$x_\mu(\tau) = \xi_\mu e^{-i\sqrt{\dot{x}^2}\tau} + \eta_\nu e^{i\sqrt{\dot{x}^2}\tau} \tag{1.16}$$

Di nuovo, la costanza di \dot{x}^2 e il fatto che la curva giaccia su X_d implicano insieme

che $\xi^2 = \eta^2 = 0$ e $2(\xi, \eta) = 1$. Notiamo che, data la periodicità dell'esponenziale complesso, le geodetiche temporali si caratterizzano tutte per essere curve temporali chiuse (CTC). Questo è il motivo per cui X_d non ammette un ordinamento temporale globale. Se, infatti, indichiamo con $I^+(x)$ (rispettivamente $I^-(x)$) l'insieme dei punti $y \in X_d$ che possono essere connessi a $x \in X_d$ tramite una curva temporale futura (rispettivamente passata), abbiamo $I^+(x) \cap I^-(x) \neq \emptyset$ e, in particolare, $x \in I^+(x) \cap I^-(x)$.

La forma delle equazioni (1.15) e (1.16) ci permette di fornire un'espressione esplicita per la distanza geodetica d tra due punti x_1 e x_2 in X_d , ovvero la lunghezza minima di una geodetica che connetta, appunto, x_1 e x_2 . Se prendiamo, infatti, due punti separati da un intervallo spaziale e una geodetica che li connetta (ovvero $x(\tau_1) = x_1$ e $x(\tau_2) = x_2$), abbiamo

$$(x(\tau_1), x(\tau_2)) = (\xi, \eta) \left[e^{-\sqrt{|\dot{x}^2|}(\tau_2 - \tau_1)} + e^{\sqrt{|\dot{x}^2|}(\tau_2 - \tau_1)} \right] \quad (1.17)$$

e, dal momento che $\sqrt{|\dot{x}^2|}(\tau_2 - \tau_1)$ è il risultato dell'integrazione di ds lungo la geodetica, otteniamo

$$\cosh d = (x_1, x_2) \quad (1.18)$$

Se, invece, i punti x_1 e x_2 sono separati da un intervallo temporale, possiamo calcolare la distanza geodetica in maniera completamente analoga a quanto appena mostrato, ottenendo l'equazione (1.19).

$$\cos d = (x_1, x_2) \quad (1.19)$$

Notiamo anche che può accadere che si abbia $(x_1, x_2) < -1$, nel qual caso non è possibile connettere x_1 e x_2 tramite una geodetica.

Allo scopo di semplificare, per il momento, la trattazione, è conveniente passare ad analizzare il caso di X_2 . Notiamo allora che un ulteriore vettore conservato lungo le geodetiche è $k_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho$. La conservazione di tale vettore è dovuta alla

completa antisimmetria del tensore di Levi-Civita $\epsilon_{\mu\nu\rho}$. Tale vettore, nuovamente in virtù dell'antisimmetria di $\epsilon_{\mu\nu\rho}$, soddisfa inoltre $k_\mu x^\mu = 0$ lungo una geodetica. Pertanto le geodetiche di X_2 sono le intersezioni di X_2 , immerso in $\mathbb{R}^{(2,1)}$, con piani passanti per l'origine, figura 1.2. Le geodetiche saranno così temporali, spaziali o nulle in base alla posizione del piano in $\mathbb{R}^{(2,1)}$. Se π contiene unicamente vettori temporali la geodetica sarà temporale; se, invece, π contiene vettori spaziali, la geodetica sarà spaziale. Ricordiamo ora che un piano in $\mathbb{R}^{(2,1)}$ può essere indivi-

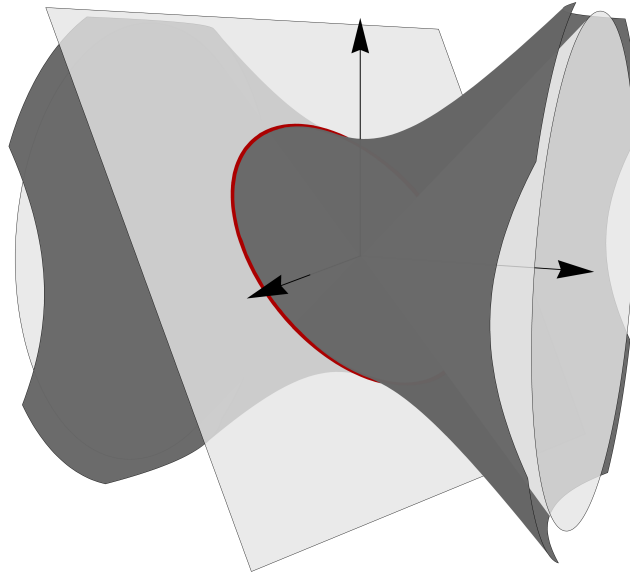


FIGURA 1.2. *Geodetiche temporali nell'Universo di Anti-de Sitter X_2 immerso in $\mathbb{R}^{(2,1)}$*

duato tramite due vettori in $\mathbb{R}^{(2,1)}$ e che, allo stesso modo, le geodetiche in X_2 sono caratterizzate tramite due vettori ξ e η , di tipo luce. Si potrebbe allora pensare di identificare ξ e η con due vettori appartenenti all'intersezione del piano π che identifica la geodetica e il cono di luce in $\mathbb{R}^{(2,1)}$. Se la geodetica è temporale questa identificazione è valida nello spazio di de Sitter bidimensionale, ma non in X_2 , dal momento che $\pi \cap C = \{0\}$. In X_2 si ha, infatti, che l'intersezione $\pi \cap C$ è non banale se la geodetica è spaziale. In tal caso π contiene sia vettori spaziali sia temporali, dal momento che, dato k in modo che $\pi = \{x \in X_2 : (x, k) = 0\}$ e a spaziale, è possibile completare $\{a, k\}$ in una base ortogonale $\{a, b, k\}$ di $\mathbb{R}^{(2,1)}$ in modo che b

sia temporale e $(b, x) = 0$, ovvero $b \in \pi$. Allora i vettori a e b generano π e, data la continuità del prodotto scalare, π contiene anche vettori di C . In particolare, se $x \in \pi$ è della forma $x = at + bu$, con $t, u \in \mathbb{R}$, l'imposizione della condizione $x^2 = 0$ identifica due generatrici del cono asintotico C , della forma (1.20), come mostra la figura 1.3.

$$\begin{cases} \zeta_1 = at \pm b\sqrt{\frac{|a^2|}{b^2}}t \\ \zeta_2 = \pm a\sqrt{\frac{b^2}{|a^2|}}t + bt \end{cases} \quad (1.20)$$

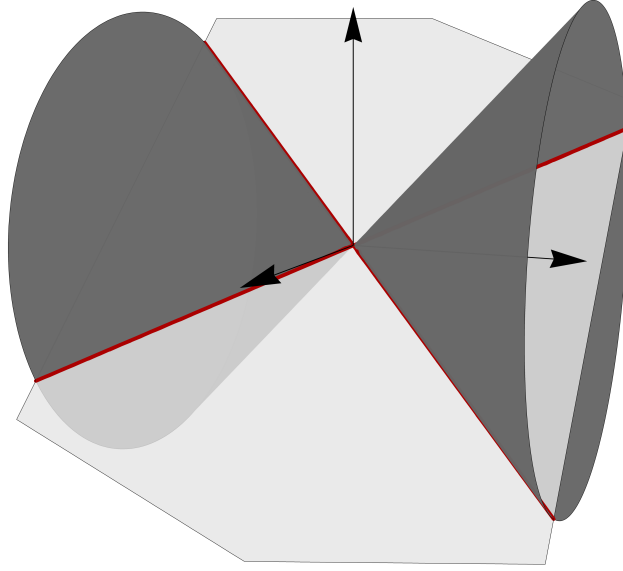


FIGURA 1.3. *Intersezione di un piano π che indintifica geodetiche spaziali in X_2 con il cono C in $\mathbb{R}^{(2,1)}$*

Per risolvere invece la difficoltà legata alle geodetiche temporali possiamo passare alla complessificazione di X_2 , che indicheremo $X_2^{(C)}$, definita come la quadrica $z^2 = 1$ in $\mathbb{C}^{(2,1)}$, con il prodotto scalare (\cdot, \cdot) di $\mathbb{R}^{(2,1)}$ generalizzato nella maniera naturale. In $\mathbb{C}^{(2,1)}$ definiamo anche il cono (complesso) $C^{(C)} = \{z \in \mathbb{C}^{(2,1)} : z^2 = 0\}$. Evidentemente $C \subseteq C^{(C)}$, e, in realtà $C^{(C)} \setminus C \neq \emptyset$. Sia allora k il vettore, definito precedentemente, che identifica il piano della geodetica tramite $(k, x) = 0$. È evidente che k debba essere spaziale affinché la geodetica individuata dal piano sia temporale. Supponiamo infatti che k sia temporale. È sempre possibile scegliere

x in π in modo che uno tra $(k - x)$ e $(k + x)$ sia un vettore temporale. Questo invaliderebbe l'equazione $(x, k) = 0$, e pertanto si avrebbe $x \notin \pi$, da cui otterremmo un assurdo. Allo stesso modo, anche $k \in C$ non è possibile, in quanto, se $y \in C$ e $(w, y) = 0$, allora $w \in C$, e il cono di luce coincide con il proprio complemento ortogonale, $C = C^\perp$. Questo risultato può essere formalizzato come segue.

Proposizione 1. *Se $\pi \subset \mathbb{R}^{(2,1)}$ è un piano di vettori temporali di $\mathbb{R}^{(2,1)}$ definito da $\pi = \{x \in \mathbb{R}^{(2,1)} : (x, k) = 0\}$, allora k è necessariamente spaziale, e viceversa.*

Tale proposizione, in realtà, ammette una generalizzazione immediata ad una versione più ampia, in quanto non è stato fatto alcun riferimento, nella dimostrazione, alla dimensionalità degli spazi in questione.

Proposizione 2. *Se $\pi \subset \mathbb{R}^{(2,d-1)}$ è un (iper)piano di vettori temporali di $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$ definito da $\pi = \{x \in \mathbb{R}^{(2,d-1)} : (x, k) = 0\}$, allora k è necessariamente spaziale, e viceversa.*

Tornando, ora, al caso di X_2 vorremmo mostrare che $\pi \cap (C^{(C)} \setminus C) \neq \emptyset$. In effetti, se π è un piano di vettori temporali in $\mathbb{R}^{(2,1)}$, esso è generato da una coppia di vettori temporali ξ_1 e ξ_2 , in modo che $x \in \pi$ possa essere scritto come $x = \xi_1 v + \xi_2 w$. I vettori ξ_1 , ξ_2 e k costituiscono una base \mathcal{B} per $\mathbb{R}^{(2,1)}$, che può essere ortogonalizzata nella base $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{k}\}$, in virtù della non degenerazione del prodotto scalare, tramite la procedura standard che fa uso della matrice di Gram. In questo modo, inoltre, $\tilde{\xi}_1$ e $\tilde{\xi}_2$ generano ancora il piano π . Se individuiamo un punto $x \in \pi$ tramite $x = \xi_1 t_1 + \xi_2 t_2$, dove $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, possiamo ricercare l'intersezione $\pi \cap C^{(C)}$ imponendo $x^2 = 0$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned}
0 = x^2 &= (\tilde{\xi}_1 t_1 + \tilde{\xi}_2 t_2)^2 \\
&= \tilde{\xi}_1^2 t_1^2 + \tilde{\xi}_2^2 t_2^2 + 2(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) t_1 t_2 \\
&= \tilde{\xi}_1^2 t_1^2 + \tilde{\xi}_2^2 t_2^2
\end{aligned} \tag{1.21}$$

da cui otteniamo, dal momento che $\tilde{\xi}_1^2, \tilde{\xi}_2^2 > 0$

$$t_1^2 = -\frac{\tilde{\xi}_2^2}{\tilde{\xi}_1^2} t_2^2 \Rightarrow t_1 = \pm i \sqrt{\frac{\tilde{\xi}_2^2}{\tilde{\xi}_1^2}} t_2 \quad (1.22)$$

oppure, equivalentemente

$$t_2^2 = -\frac{\tilde{\xi}_1^2}{\tilde{\xi}_2^2} t_1^2 \Rightarrow t_2 = \pm i \sqrt{\frac{\tilde{\xi}_1^2}{\tilde{\xi}_2^2}} t_1 \quad (1.23)$$

Il piano π interseca allora il cono di luce complesso $C^{(C)}$ lungo le due generatrici (complesse) $\tilde{\zeta}_1$ e $\tilde{\zeta}_2$, equazione (1.24).

$$\begin{cases} \tilde{\zeta}_1 &= \tilde{\xi}_1 t \pm i \tilde{\xi}_2 \sqrt{\frac{\tilde{\xi}_1^2}{\tilde{\xi}_2^2}} t \\ \tilde{\zeta}_2 &= \tilde{\xi}_2 t \pm i \tilde{\xi}_1 \sqrt{\frac{\tilde{\xi}_2^2}{\tilde{\xi}_1^2}} t \end{cases} \quad (1.24)$$

Abbiamo allora che qualunque piano temporale di $\mathbb{R}^{(2,1)}$ definisce una geodetica di X_2 . Tale piano può essere individuato mediante due vettori del cono complesso $C^{(C)}$ che, a loro volta, possono essere utilizzati per parametrizzare la geodetica in questione. Questo fatto ci suggerisce un'analogia con le geodetiche nello spazio di Minkowski, che possono essere scritte nella forma (1.25)

$$x_\mu(\tau) = x_\mu(0) + p_\mu \tau \quad (1.25)$$

dove p_μ indica il momento relativistico.² Parimenti, le geodetiche temporali di X_d , equazione (1.16), possono essere riespresse nella forma (1.26).

$$\begin{aligned} x_\mu(\tau) &= x_\mu(0) e^{-i\sqrt{\dot{x}^2} \tau} + 2i\eta_\mu \sin\left(\sqrt{\dot{x}^2} \tau\right) \\ &= x_\mu(0) e^{-i\sqrt{\dot{x}^2} \tau} + 2\eta_\mu \sinh\left(i\sqrt{\dot{x}^2} \tau\right) \end{aligned} \quad (1.26)$$

²La geodetica (1.25) rappresenta, in effetti, il movimento libero di una particella in \mathbb{M}_d di massa $m = 1$ nelle unità naturali, per le quali $c = 1$.

Le geodetiche spaziali, d'altronde, possono essere espresse nella forma (1.27), simile alla (1.26).

$$x_\mu(\tau) = x_\mu(0)e^{-\sqrt{|x^2|\tau}} + 2\eta_\mu \sinh\left(\sqrt{|x^2|\tau}\right) \quad (1.27)$$

Collettivamente, allora, le geodetiche spaziali e temporali in X_d possono essere scritte nella forma (1.28).

$$x_\mu(\tau) = x_\mu(0)e^{\sqrt{-\dot{x}^2}\tau} + 2\eta_\mu \sinh\left(\sqrt{-\dot{x}^2}\tau\right) \quad (1.28)$$

Il confronto di (1.28), e in particolare di (1.26), con la sua controparte minkowskiana (1.25) permette allora un'analogia tra lo spazio dei momenti nello spazio di Minkowski e il cono complesso in $\mathbb{R}^{(2,1)}$. In questo senso identificheremo il cono $C^{(C)}$ con lo spazio dei momenti per X_2 e, come vedremo, tale identificazione risulta generalizzabile al caso di X_d . In effetti, il cono complesso $C^{(C)}$ è anche necessario per la costruzione delle onde piane su X_d .

La generalizzazione della discussione precedente al caso di uno spazio di Anti-de Sitter di dimensione arbitraria X_d non è immediata. Sarà necessaria la definizione seguente circa le sottovarietà $\overline{\mathcal{M}}$ di una varietà \mathcal{M} .

Definizione 1. *Una sottovarietà $\overline{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}$ di una varietà (pseudo)riemanniana $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ è detta totalmente geodetica se qualunque geodetica di $\overline{\mathcal{M}}$ dotata della metrica $\overline{\mathbf{g}}$ indotta da \mathbf{g} è anche una geodetica della varietà (pseudo)riemanniana $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$.*

L'utilità di tale definizione risiede allora nel risultato della proposizione seguente, [43][44].

Proposizione 3. *Se $(\overline{\mathcal{M}}, \overline{\mathbf{g}})$ è una sottovarietà della varietà (pseudo)riemanniana $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. $(\overline{\mathcal{M}}, \overline{\mathbf{g}})$ è una sottovarietà totalmente geodetica di $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$.

2. Il tensore della seconda forma fondamentale si annulla identicamente: $II(X, Y) =$

$$\nabla_X Y - \bar{\nabla}_X Y = 0.$$

3. Dato $v \in T_p \bar{\mathcal{M}}$, la geodetica $\gamma(\tau)$ sulla varietà \mathcal{M} di direzione iniziale $\dot{\gamma}(0) =$

v giace sulla sottovarietà $\bar{\mathcal{M}}$ fintanto che $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

È così evidente come l'intersezione di sottovarietà totalmente geodetiche sia a sua volta totalmente geodetica e, nel caso di una varietà \mathcal{M} definita come una quadrica in \mathbb{R}^n , come è il caso di X_d , tutte le intersezioni di \mathcal{M} con (iper)piani della forma $(K, x) = 0$ siano sottovarietà totalmente geodetiche, come mostra la proposizione 4. Dal momento che una geodetica è a sua volta una sottovarietà totalmente geodetica, le geodetiche su X_d possono essere identificate come le intersezioni unidimensionali di (intersezioni di) (iper)piani passanti per l'origine in $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$ con X_d .

Proposizione 4. Sia K un vettore $K \in \mathbb{R}^{(2,d-1)}$ e π il piano $\pi = \{x \in \mathbb{R}^{(2,d-1)} : (x, K) = 0\}$. L'insieme $\pi \cap X_d$ è una sottovarietà totalmente geodetica di X_d .

Dimostrazione. Sia γ la geodetica su X_d con condizione iniziale $\gamma(0) = p \in \pi \cap X_d$ e di direzione iniziale $\dot{\gamma}(0) = v \in T_p(\pi \cap X_d)$. Dal momento che $T_p(\pi \cap X_d) = T_p\pi \cap T_p X_d$ e $T_p\pi \simeq \pi$, v soddisfa, come p , l'equazione $(v, K) = 0$. Ma allora, se $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, abbiamo

$$x_\mu(\tau) = x_\mu(0) + \dot{x}_\mu(0)\tau + O(\tau^2) \quad (1.29)$$

e, in particolare, $(x_\mu(\tau), K) = O(\tau^2)$. □

Pertanto, un insieme di $d - 1$ vettori $K_i \in \mathbb{R}^{(2,d-1)}$, con $i = 1, \dots, d - 1$, definiscono una geodetica di X_d tramite l'intersezione dei piani π_{K_i} con X_d , equazione (1.30).

$$X_d \supset \gamma = \bigcap_{i=1}^{d-1} [\pi_{K_i} \cap X_d] = \left[\bigcap_{i=1}^{d-1} \pi_{K_i} \right] \cap X_d \quad (1.30)$$

Le intersezioni di $d-1$ (iper)piani $(d-1)$ -dimensionali in $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$ definiscono piani bidimensionali in $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$, e la generalizzazione della discussione precedente circa lo spazio dei momenti di X_2 al caso di X_d è ora immediata.

La possibilità di individuare le geodetiche intersecando X_d con (iper)piani in $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$ ci permette di dimostrare molto semplicemente alcuni risultati, tra cui, per esempio, abbiamo la proposizione seguente.

Proposizione 5. *Date due geodetiche temporali γ_1 e γ_2 tali per cui $\xi \in \gamma_1 \cap \gamma_2 \subset X_d$ esiste $\zeta \in X_d \subset \mathbb{R}^{(2,d-1)}$ tale per cui $\zeta \in \gamma_1 \cap \gamma_2 \subset X_d$. Tale punto ζ è il simmetrico di ξ rispetto all'origine in $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$.*

Dimostrazione (nel caso di X_2). Nel caso di X_2 la dimostrazione è molto semplice, e la situazione è immediatamente chiara se si considera la situazione mostrata in figura 1.4. Due piani incidenti π_1 e π_2 passanti per l'origine si intersecano lungo una retta, a sua volta contenente l'origine. Siano allora γ_1 e γ_2 le geodetiche corrispondenti, rispettivamente, a π_1 e π_2 , e sia ξ come nelle ipotesi del teorema. Data la simmetria di X_2 sotto riflessione centrale, infatti $x^2 = (x, x) = (-x)^2 = (-x, -x)$, anche il simmetrico ζ di ξ rispetto all'origine giace in $\gamma_1 \cap \gamma_2 \subset X_2$. \square

1.4 Onde piane su X_d

Un'applicazione dei risultati della sezione precedente consiste nella costruzione delle soluzioni all'equazione di Klein-Gordon su X_d , analoghe alle onde piane. Per far questo, sarà necessario studiare l'algebra di Lie $\mathfrak{G} = so(2, d-1)$ del gruppo $G = SO(2, d-1)$ delle isometrie di X_d . Se osserviamo X_d dal punto di vista del suo embedding in $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$, un elemento \mathfrak{g} di \mathfrak{G} è un operatore lineare tale per cui $(\mathfrak{g}x, y) = (x, \mathfrak{g}y)$, dati due vettori qualunque $x, y \in \mathbb{R}^{(2,d-1)}$. Come generatori dell'algebra possiamo prendere le matrici antisimmetriche $\mathfrak{M}_{\mu\nu} = e_\mu \wedge e_\nu = -\mathfrak{M}_{\nu\mu}$. In un approccio più elaborato, possiamo definire l'isomorfismo lineare ℓ che mappa i tensori due volte controvarianti nelle mappe lineari di $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$ in sé, in modo

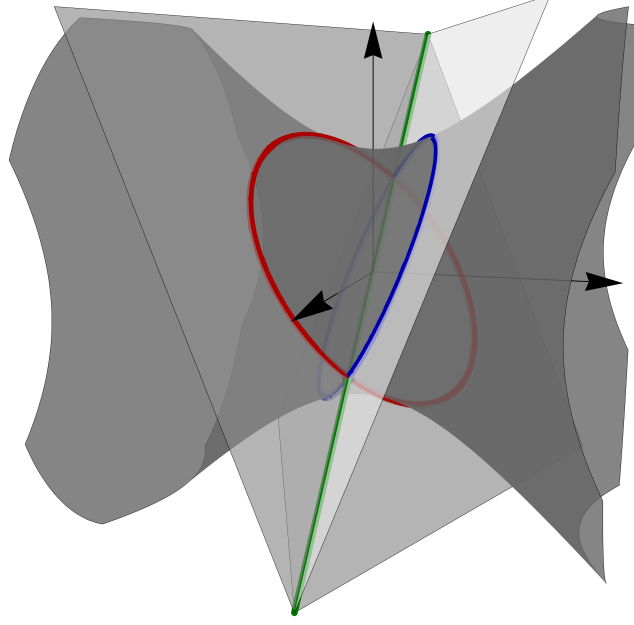


FIGURA 1.4. Due geodetiche che si incontrano in un punto su X_2 possiedono un'intersezione anche nel punto simmetrico rispetto all'origine in $\mathbb{R}^{(2,1)}$.

che $[\ell(A)]^\mu{}_\nu = A^{\mu\rho}g_{\rho\nu}$. In questo modo la base $\{\mathfrak{M}_{\mu\nu}\}$ di \mathfrak{G} sarà data da $\mathfrak{M}_{\mu\nu} = \ell(e_\mu \wedge e_\nu)$. Se, invece, T indica una rappresentazione regolare e fedele di G sullo spazio delle funzioni C^∞ su $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$, questa può essere realizzata nella maniera seguente.

$$T_g f(x) = f(g^{-1}x), \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^{(2,d-1)}) \quad (1.31)$$

La rappresentazione T ci permette allora di calcolare immediatamente i corrispettivi $M_{\mu\nu}$ sotto T dei generatori $\mathfrak{M}_{\mu\nu}$.

$$M_{\mu\nu} f(x) = \frac{d}{dt} [f(e^{-t\mathfrak{M}_{\mu\nu}} x)] \Big|_{t=0} = (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) f(x) \quad (1.32)$$

Possiamo pertanto identificare $M_{\mu\nu}$ con gli operatori differenziali (1.33) su $C^\infty(\mathbb{R}^{(2,d-1)})$.

$$M_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu \quad (1.33)$$

Se definiamo poi il generatore delle dilatazioni $D = x_\mu \partial^\mu$ su $C^\infty(\mathbb{R}^{(2,d-1)})$, troviamo che i generatori $M_{\mu\nu}$ soddisfano la relazione (1.34), dove \square_M indica il d'Alambertiano sullo spazio ambiente $\square_M = \partial_\mu \partial^\mu$.

$$\begin{aligned}
M^2 f(x) &= M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} f(x) \\
&= (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) f(x) \\
&= 2x^2 \partial_\nu \partial^\nu f(x) - 2(\partial_\nu x^\nu) x_\mu \partial^\mu f(x) - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu \partial^\mu f(x) \\
&\quad + 2(\partial_\nu x^\mu) x_\mu \partial^\nu f(x) \\
&= [2x^2 \square_M - 2(d-1)D - 2D^2] f(x)
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Il risultato in (1.34) è giustificato dal fatto che $\partial_\mu x^\mu = d+1$ e dalla relazione $x_\mu x^\nu \partial_\nu \partial^\mu = D^2 - D$.

Se $f(x)$ indica allora una funzione omogenea di grado zero su $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$, indicando con \square il d'Alambertiano su X_d , si ha che $\square(f|_{X_d}) = (\square_M f)|_{X_d}$.

Sia dunque $f(x)$ una funzione omogenea di grado 0 sull'insieme aperto $V = \{x \in \mathbb{R}^{(2,d-1)} : x^2 > 0\}$. Tale funzione soddisfa la relazione $Df = 0$ e, pertanto, $M^2 f = 2x^2 \square_M f$, da cui $M^2(f|_{X_d}) = 2\square(f|_{X_d})$. Dal momento che una funzione C^∞ su X_d ammette un'estensione unica omogenea di grado zero sull'aperto V , possiamo affermare la validità della relazione (1.35) per ogni funzione $f(x)$ di grado C^∞ su X_d .

$$\square f = \frac{1}{2} M^2 f \tag{1.35}$$

Ora, se $f(x)$ è una funzione omogenea di grado n che soddisfa l'equazione $\square_M f(x) = 0$ abbiamo che, su X_d essa soddisfa l'equazione (1.36).

$$[\square + n(n+d-1)] f(x)|_{X_d} = 0 \tag{1.36}$$

Tale equazione è a tutti gli effetti l'equazione di Klein-Gordon su X_d , a patto che

si identifichi il parametro di massa con la quantità (1.37).

$$m_n^2 = n(n + d - 1) \quad (1.37)$$

Al contrario, se una funzione $f(x)$ soddisfa l'equazione (1.36), essa possiede un'unica estensione $\tilde{f}(x)$ in V , omogenea di grado n , che soddisfa l'equazione delle onde $\square_M \tilde{f}(x) = 0$. Questo ci permette allora di concludere la dimostrazione della proposizione seguente.

Proposizione 6. *Se $f(x)$ è una qualunque funzione C^∞ su V vale la relazione (1.38).*

$$\square(f|_{X_d}) = [(\square_M - (d-1)D - D^2)f(x)]|_{X_d} \quad (1.38)$$

Notiamo infine che l'equazione (1.36) è invariante sotto l'involuzione $n \rightarrow 1 - d - n$, e una funzione $g(x)$ omogenea di grado $1 - d - n$ che soddisfi $\square_M g(x) = 0$, soddisfa la medesima equazione (1.36) su X_d .

Consideriamo allora le funzioni $\psi_n^{(\xi)}(x) = (x, \xi)^n$ definite su $\mathbb{R}^{(2, d-1)}$. Le funzioni $\psi_n^{(\xi)}$ sono omogenee di grado n e soddisfano l'equazione (1.39).

$$\square_M \psi_n^{(\xi)}(x) = n(n-1)\xi^2(x, \xi)^{n-2} \quad (1.39)$$

Dal momento che il prodotto scalare su $\mathbb{R}^{(2, d-1)}$ è non degenere, le $\psi_n^{(\xi)}$ forma un insieme di soluzioni dell'equazione delle onde, ovvero $\square_M \psi_n^{(\xi)}(x) = 0$ qualunque sia $x \in \mathbb{R}^{(2, d-1)}$ e qualunque sia $n \in \mathbb{Z}$, se e solo se $\xi^2 = 0$. Con riferimento ai risultati del paragrafo 1.3, questo ci permette di definire, in analogia con lo spazio piatto, le “onde piane” su X_d come le funzioni $\psi_n^{(\xi)}(x)$, dove $\xi \in C^{(C)}$. Tali funzioni, infatti, soddisfano l'equazione di Klein-Gordon (1.40) con massa (1.37)

$$(\square + m_n^2)\psi_n^{(\xi)}(x) = 0 \quad (1.40)$$

e, data la simmetria dell'equazione sotto l'involuzione $n \rightarrow d - 1 - n$, abbiamo che

la medesima equazione è risolta anche da $\psi_{1-d-n}^{(\xi)}(x)$.

$$(\square + m_n^2) \psi_{1-d-n}^{(\xi)}(x) = 0 \quad (1.41)$$

1.5 Compattificazione, iperbolicità globale

Fino ad ora non abbiamo introdotto alcun sistema di coordinate esplicito su X_d . Tuttavia, al fine di studiarne alcune proprietà globali, è utile definire alcuni di tali sistemi. Nel seguito indicheremo con \tilde{X}_d il ricoprimento universale di X_d .

Il sistema di coordinate più semplice che possiamo introdurre è suggerito dalla definizione di X_d come quadrica in $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$. Questo ha peraltro il vantaggio di mettere esplicitamente in evidenza la topologia $S^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$ di X_d . Dato dunque $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d-1}$ e $t \in \mathbb{R}$ definiamo la mappa $\chi(t, \mathbf{x})$ come segue

$$\chi(t, \mathbf{x}) = \left[\sqrt{1 + \mathbf{x}^2} \sin t, \mathbf{x}, \sqrt{1 + \mathbf{x}^2} \cos t \right] \quad (1.42)$$

Evidentemente χ definisce un diffeomorfismo di $S^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$ su X_d , e questa può essere inoltre sollevata ad una mappa $\tilde{\chi}(t, \mathbf{x}) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \tilde{X}_d$. Questo è chiaro se riscriviamo la mappa nella forma differente (1.43), facente uso dell'algebra di Lie \mathfrak{G} di G .

$$\chi(t, \mathbf{x}) = e^{m_0 t} \left[0, \mathbf{x}, \sqrt{1 + \mathbf{x}^2} \right] \quad (1.43)$$

Affinché l'equazione (1.43) riproduca (1.42) è necessario richiedere che $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq S^1$. Se invece poniamo $t \in \mathbb{R}$ otteniamo la mappa $\tilde{\chi}(t, \mathbf{x})$, che mappa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ in \tilde{X}_d . Il ricoprimento universale \tilde{X}_d non possiede geodetiche (o, più in generale, curve) temporali chiuse, ed è semplicemente connesso, come mostra la figura 1.5. Infine, prendendo $\mathbf{x}^2 = \sinh \psi$, e quindi $\sqrt{1 + \mathbf{x}^2} = \cosh \psi$, possiamo scrivere la metrica per X_d nella forma seguente, equazione (1.44).

$$ds^2 = \cosh^2 \psi dt^2 - d\psi^2 - \sinh^2 \psi d\Omega_{d-1} \quad (1.44)$$

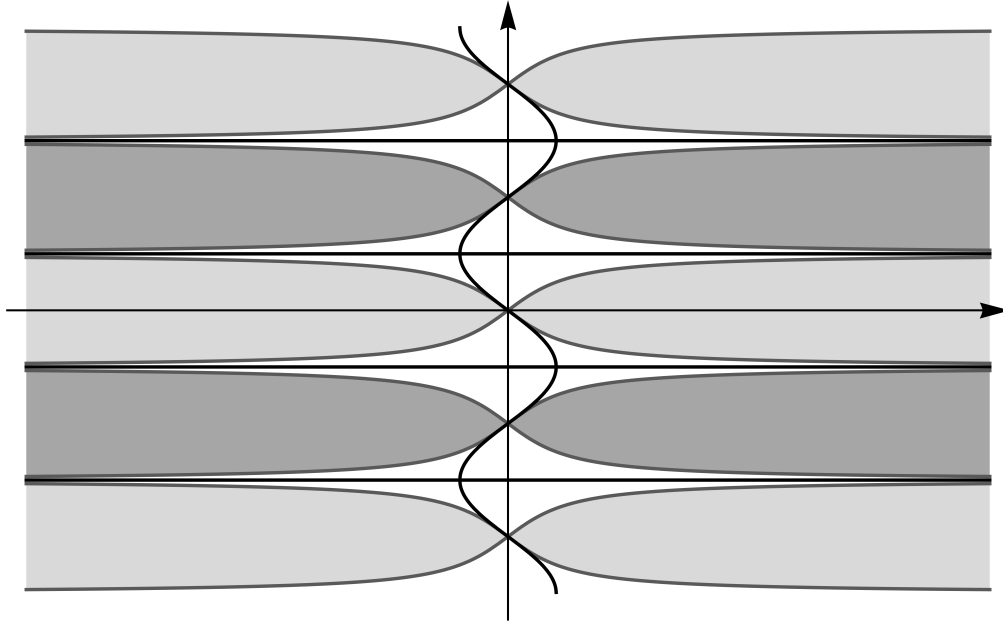


FIGURA 1.5. Ricoprimento universale \tilde{X}_d di X_d . La curva nera rappresenta una geodetica temporale

Un differente sistema di coordinate valido per X_d può essere costruito ponendo $x^0 = R \cos t$ e $x^d = R \sin t$. In questo modo l'equazione della quadrica $x^2 = 1$ diviene $R^2 - \mathbf{x}^2 = 1$, dove indichiamo $x = (x^0, \mathbf{x}, x^d)$. La metrica di X_d diviene allora quella mostrata in (1.45).

$$ds^2 = dR^2 + R^2 dt^2 - (dx^1)^2 - \dots - (dx^{d-1})^2 \quad (1.45)$$

Se in (1.45) prendiamo t costante, otteniamo le equazioni che definiscono lo spazio iperbolico $(d - 1)$ -dimensionale come una quadrica immersa nello spazio di Minkowski quadridimensionale. Su tale spazio iperbolico possiamo introdurre un sistema intrinseco di coordinate che induca la metrica intrinseca $d\sigma^2$, in modo tale per cui $ds^2 = R^2 dt^2 - d\sigma^2$. Tali coordinate possono essere introdotte, per esempio,

utilizzando la tecnica della proiezione stereografica, come nell'equazione (1.46).

$$\begin{cases} x^0 = \frac{1 + \rho^2}{1 - \rho^2} \cos t \\ \mathbf{x} = \frac{2\rho}{1 - \rho^2} \hat{\mathbf{x}} \\ x^d = \frac{1 + \rho^2}{1 - \rho^2} \sin t \end{cases} \quad 0 \leq \rho < 1, \quad \|\hat{\mathbf{x}}\| = 1 \quad (1.46)$$

In questo modo i punti all'infinito spaziale giacciono alla distanza finita dall'origine $\rho = 1$. Inoltre le sezioni spaziali sono conformi allo spazio piatto, e questo garantisce che tutti gli angoli sulle sezioni spaziali siano rappresentati fedelmente dalle coordinate scelte. La metrica su X_d diviene allora quella mostrata in (1.47).

$$ds^2 = \left(\frac{1 + \rho^2}{1 - \rho^2} \right)^2 dt^2 - \frac{4}{(1 - \rho^2)^2} [d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{d-1}^2], \quad 0 \leq \rho < 1 \quad (1.47)$$

Notiamo che le (iper)superfici definite da $t = 0$ e $t = 2\pi$ debbono essere identificate se richiediamo che la metrica ds^2 dell'equazione (1.47) rappresenti lo spazio di Anti-de Sitter. Se, invece, permettiamo a t di assumere tutti i valori della retta reale otteniamo, ancora una volta, il ricoprimento universale \tilde{X}_d .

Un ultimo sistema di coordinate che può essere introdotto su X_d consiste nella proiezione stereografica di X_d dal punto di base $e = (0, \mathbf{0}, -1)$ sul piano $x^d = 0$, figura 1.6.

Lo svantaggio principale nella scelta delle coordinate stereografiche risiede nel fatto che queste non ricoprono tutto X_d , ma solo la regione definita da $x^d > -1$. D'altra parte, le coordinate stereografiche rendono la metrica conforme a quella dello spazio piatto, e questo garantisce che i coni di luce siano tali nel senso dello spazio di Minkowski. Infatti, se ricerchiamo un'espressione esplicita per le

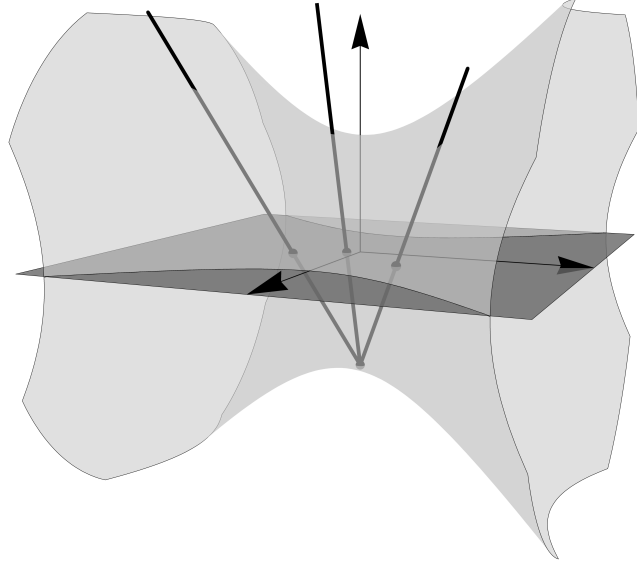


FIGURA 1.6. *Proiezione stereografica di X_2 sul piano $x^2 = 0$*

coordinate stereografiche otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{l} x^0 = 2X^0/(1-s^2) \\ x^1 = 2X^1/(1-s^2) \\ \vdots \\ x^{d-1} = 2X^{d-1}/(1-s^2) \\ x^d = (1+s^2)/(1-s^2) \end{array} \right. \quad s^2 = (X^0)^2 - (X^1)^2 - \dots - (X^{d-1})^2 < 1 \quad (1.48)$$

e la metrica diviene conformemente piatta, come nell'equazione (1.49).

$$ds^2 = \frac{4}{(1-s^2)^2} [(dX^0)^2 - (dX^1)^2 - \dots - (dX^{d-1})^2] \quad (1.49)$$

Ora, una volta introdotte delle particolari coordinate su X_d , risulta utile studiare le proprietà all'infinito di X_d . Dovremo allora compattificare X_d alla maniera di Carter-Penrose e, nell'ambito della metrica (1.47), sceglieremo un fattore conforme

della forma $\Omega = (1 - \rho^2)/(1 + \rho)^2$, in modo che si abbia

$$d\hat{s}^2 = \Omega^2 ds^2 = dt^2 - \frac{4}{(1 + \rho^2)^2} [d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{d-1}] \quad (1.50)$$

La parte spaziale della metrica è conforme alla sfera S^{d-1} piuttosto che allo spazio piatto. In effetti (1.50) mostra come X_d sia conforme a una porzione dello spazio di Einstein d -dimensionale, caratterizzato dalla topologia di $\mathbb{R} \times S^{d-1}$. In questo modo il bordo \mathcal{J} di X_d compattificato è temporale e ha la topologia di $\mathbb{R} \times S^{d-2}$. Esso si caratterizza come l'insieme degli estremi delle geodetiche nulle o, equivalentemente, di quelle spaziali, sicché si è soliti identificare \mathcal{J} con l'infinito spaziale di X_d . La situazione si differenzia notevolmente dal caso dello spazio piatto di Minkowski, la cui compattificazione presenta l'infinito spaziale i^0 e gli infiniti nulli (di tipo luce) \mathcal{J}^\pm come insiemi come insiemi disgiunti. Inoltre non è possibile portare i punti all'infinito temporale di X_d ad una distanza finita dall'origine tramite compattificazione conforme, al contrario di i^\pm in \mathbb{M}_d .

Possiamo ora studiare le geodetiche nulle radiali, utilizzando le coordinate (1.46). Lungo le geodetiche nulle abbiamo $ds^2 = 0$, e la richiesta che siano radiali implica $d\Omega_{d-1} = 0$. Questo ci permette di concludere

$$dt = \pm \frac{2d\rho}{1 + \rho^2} \Rightarrow \tan \frac{t}{2} = \pm \rho \quad (1.51)$$

e, pertanto, una geodetica di condizione iniziale $\rho(0) = 0$ raggiunge \mathcal{J} in $t = \pi/2$. Notiamo che, utilizzando le coordinate (1.46), la pendenza delle geodetiche nulle dipende dalla distanza dall'origine e, sebbene sia possibile ridefinire opportunamente le coordinate in modo che le geodetiche radiali di tipo luce abbiano pendenza identicamente pari a uno come si usa nei diagrammi di Penrose, questo renderebbe tuttavia la pendenza dipendente dalla direzione.

Da ultimo possiamo investigare la validità di un'importante proprietà degli spazi curvi, l'iperbolicità globale. Utilizziamo allora le coordinate fornite dalla

mappa (1.42) con la scelta che conduce alla metrica (1.44). Possiamo riscrivere la metrica in una forma che sia conformemente piatta, per poi ridefinire le coordinate in modo da portare valori infiniti della coordinata radiale a valori finiti. Facciamo ciò tramite la trasformazione di coordinate

$$\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = e^\psi \quad (1.52)$$

in modo che la metrica divenga

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} [dt^2 - d\theta^2 - \sin^2 \theta d\Omega_{d-1}] \quad (1.53)$$

In questo modo è, di nuovo, evidente come X_d sia equivalente, in senso conforme, alla porzione $0 \leq \theta < \pi/2$ dello spazio di Einstein, figura 1.7.

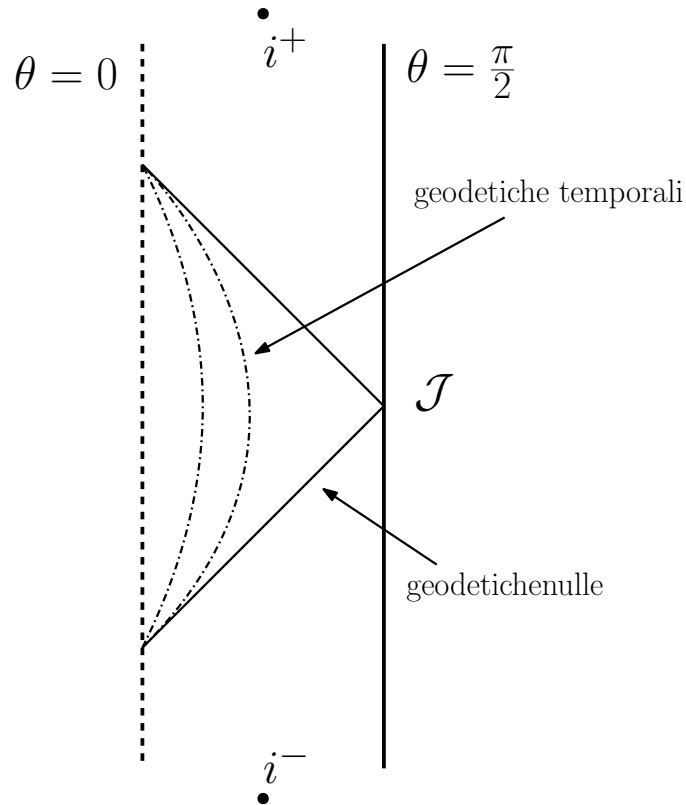


FIGURA 1.7. Diagramma di Penrose di X_d , di metrica (1.53)

L'analisi del diagramma in figura 1.7 ci permette di notare come non sia possibile identificare una superficie di Cauchy su X_d . Se, infatti, prendiamo le superfici

S , spaziali, a t costante, è sempre possibile trovare una superficie nulla che non interseca S . Ma allora $D^+(S) \cup D^-(S) \neq X_d$, e S non è una superficie di Cauchy. Allo stesso modo, se S è una superficie spaziale qualunque, è sempre possibile trovare una geodetica nulla che non intersechi S , da cui si generalizza la conclusione precedente. Ma, allora, se X_d non possiede superfici di Cauchy, non è uno spazio globalmente iperbolico. Pertanto, condizioni iniziali date su una superficie spaziale $S \subset X_d$ permettono di prevedere l'evoluzione del sistema unicamente entro un sottoinsieme limitato di X_d (precisamente $D^+(S)$ o $D^-(S)$) con frontiera nulla (l'orizzonte di Cauchy $H(S) = \partial D^\pm(S)$).

QFT su spazi curvi

2.1 QFT su spazio di Minkowski: CCR

Cominceremo la nostra trattazione considerando la quantizzazione standard di un campo scalare sullo spazio di Minkowski d -dimensionale. Per fare questo consideriamo un campo $\varphi(x, t)$ che soddisfi all'equazione di Klein-Gordon (2.1).

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi(t, \mathbf{x}) + m^2 \varphi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (2.1)$$

Tale equazione può essere ottenuta dalla densità lagrangiana (2.2) ponendo nulla la derivata variazionale dell'azione tramite essa costruita.

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi^2] (t, \mathbf{x}) \quad (2.2)$$

La derivata variazionale di \mathcal{L} rispetto a $\partial_t \varphi$ definisce allora il momento $\pi(t, \mathbf{x})$ tramite (2.3).

$$\pi(t, \mathbf{x}) = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_t \varphi)} \quad (2.3)$$

Le funzioni $u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) \propto \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ sono autofunzioni di frequenza positiva dell'operatore $\partial_\mu \partial^\mu + m^2$, dal momento che si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) = -i\omega u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) \quad (2.4)$$

con $\omega = \sqrt{k^2 + m^2} > 0$. Se poi definiamo un prodotto scalare come in (2.5), dove Σ_t indica un'ipersuperficie spaziale di simultaneità, troviamo che l'insieme di soluzioni $u_{\mathbf{k}}$ forma un insieme di funzioni ortogonali, nel senso che $(u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}) = 0$ se $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$.

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi) &= -i \int_{\Sigma_t} \left[\varphi(x) \partial_t \overline{\psi(x)} - (\partial_t \varphi(x)) \overline{\psi(x)} \right] d\mathbf{x} \\ &= -i \int_{\Sigma_t} \left[\varphi(x) \overleftrightarrow{\partial}_t \overline{\psi(x)} \right] d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Se si scelgono poi condizioni al contorno opportune, per esempio imponendo che $u_{\mathbf{k}}(x)$ siano funzioni sul toro \mathbb{T}^{d-1} , è possibile trovare costanti di normalizzazione che rendano $\{u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})\}$ un insieme di soluzioni ortonormali: $(u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}) = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$. A questo punto possiamo procedere con lo schema di quantizzazione canonica, tramite la promozione di φ e π al rango di campi operatoriali e l'imposizione delle regole di commutazione canoniche (CCR) (2.6).

$$[\varphi(t, \mathbf{x}), \varphi(t, \mathbf{x}')] = 0 \quad (2.6a)$$

$$[\pi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')] = 0 \quad (2.6b)$$

$$[\varphi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')] = i\delta^{d-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.6c)$$

A questo punto pare opportuno notare come il prodotto scalare definito da (2.5) non sia in generale definito positivo se non si impongono ulteriori condizioni, e pertanto non è possibile costruire uno spazio di Hilbert di singola particella a partire da tale definizione. Se, tuttavia, si restringe l'attenzione alle soluzioni di (2.1) di frequenza positiva, ovvero le soluzioni $\varphi(t, x)$ la cui trasformata di Fourier nella coordinata temporale $\tilde{\varphi}(\omega, x)$ si annulli per $\omega < 0$, allora (2.5) risulta definito positivo. Allora, se V_+ è l'insieme delle soluzioni di (2.1) di frequenza positiva,

costruiremo lo spazio degli stati del sistema come il completamento di Hilbert $\mathcal{H}(V_+)$ di V_+ . In questo modo, tramite la trasformata di Fourier, $\mathcal{H}(V_+)$ risulta essere isomorfo allo spazio di Hilbert $L^2(M_+)$ delle funzioni a quadrato sommabili sulla mass shell positiva. Nella stessa maniera è allora possibile mettere in una corrispondenza lineare naturale le soluzioni di frequenza negativa di (2.1) con $\overline{\mathcal{H}}$. Ora lo spazio di Hilbert relativo a due particelle, dati gli spazi di singola particella \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , sarà dato da $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Dal momento che le particelle sono indistinguibili e portano spin nullo, sarà tuttavia necessario simmetrizzare il prodotto tensoriale $\text{Sym}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) = \mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 / (v \otimes w - w \otimes v)$. Parimenti lo spazio di n particelle indistinguibili sarà dato da $\mathcal{H}_1 \odot \cdots \odot \mathcal{H}_n = \text{Sym}^n \mathcal{H} = \bigodot^n \mathcal{H}$, mentre lo spazio di Hilbert che rappresenta lo stato in cui non siano presenti particelle è unidimensionale, pertanto può esser preso $\simeq \mathbb{C}$. Avremo allora che lo spazio di Hilbert di qualunque stato per il campo di Klein-Gordon sarà dato dal cosiddetto *spazio di Fock* simmetrizzato $\text{Sym } \mathcal{F}(\mathcal{H}) = \mathcal{F}_S(\mathcal{H})$.

$$\mathcal{F}_S(\mathcal{H}) = \mathbb{C} \oplus \left[\bigoplus_{n=1}^{\infty} \left(\bigodot^n \mathcal{H} \right) \right] = \mathbb{C} \oplus \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \text{Sym}^n \mathcal{H} \right) \quad (2.7)$$

È allora evidente che un qualunque stato in $\mathcal{F}_S(\mathcal{H})$ potrà essere rappresentato da $|\Psi\rangle \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$, dove $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ e $\alpha_j \in \bigodot^j \mathcal{H}$. Lo stato $|0\rangle \rightarrow (1, 0, \dots, 0, \dots)$ sarà allora detto *stato di vuoto*, poiché rappresenta uno stato in cui non siano presenti particelle.

Per passare allora alla teoria di campo quantistica avremo bisogno di ricercare un operatore $\hat{\Psi}(x)$, definito in qualunque punto dello spaziotempo, che descriva il campo scalare. Per far ciò procediamo come segue. Dato un qualunque stato $\psi \in \mathcal{H}$ definiamo gli operatori di creazione e distruzione, rispettivamente $a^\dagger(\overline{\psi})^1$ e

¹Con $\overline{\psi}$ intendiamo il vettore in $\overline{\mathcal{H}}$ corrispondente a ψ sotto l'azione della mappa di coniugazione complessa.

$a(\psi)$, tramite la loro azione su $|\Psi\rangle$.

$$a(\bar{\psi})|\Psi\rangle = (\bar{\psi} \cdot \alpha_1, \sqrt{2}\bar{\psi} \cdot \alpha_2, \sqrt{3}\bar{\psi} \cdot \alpha_3, \dots) \quad (2.8a)$$

$$a^\dagger(\psi)|\Psi\rangle = (0, \alpha_0\psi, \sqrt{2}\alpha_1 \otimes \psi, \sqrt{3}\alpha_2 \otimes \psi, \dots) \quad (2.8b)$$

Gli operatori (2.8a) e (2.8b) sono uno l'aggiunto dell'altro, e l'applicazione delle definizioni permette di verificare come lo stato di vuoto $|0\rangle$ sia caratterizzato univocamente, a meno di una fase, dall'equazione $a(\bar{\psi})|0\rangle = 0$. Tali operatori, inoltre, generano l'algebra definita dalle regole di commutazione (analoghe alle (2.12)) (2.9).

$$[a(\bar{\psi}), a(\bar{\phi})] = 0 \quad (2.9a)$$

$$[a^\dagger(\psi), a^\dagger(\phi)] = 0 \quad (2.9b)$$

$$[a(\bar{\psi}), a^\dagger(\phi)] = (\psi, \phi)\mathbb{1} \quad (2.9c)$$

L'operatore $N(\psi) = a^\dagger(\psi)a(\bar{\psi})$, invece, può essere interpretato come l'operatore numero per lo stato $\psi \in \mathcal{H}$, e i suoi autostati saranno allora gli stati con un numero di particelle definito nello stato ψ .

In questo modo il campo $\hat{\Psi}$ sarà descritto, in termini degli operatori di creazione e distruzione, dalla scomposizione

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_n \psi_n(x)a(\bar{\psi}_n) + \overline{\psi_n(x)}a^\dagger(\psi_n) \quad (2.10)$$

dove $\{\psi_n\}$ forma una base ortonormale per \mathcal{H} . Così $\hat{\Psi}$ soddisfa l'equazione di Klein-Gordon, e i coefficienti dell'espansione di $\hat{\Psi}$ in termini di autofunzioni di frequenza positiva sono gli operatori di creazione e distruzione. È interessante notare

come (2.10) non converga puntualmente, ma sia da interpretarsi in senso distribuzionale, e pertanto $\hat{\Psi}(x)$ può essere pensato unicamente come una distribuzione a valori operatoriali sullo spaziotempo. Ciò, tuttavia, pone un ostacolo all'applicabilità della procedura, poiché spesso risulta difficile fornire senso matematico ad operazioni non lineari con i campi $\hat{\Psi}$. Si pensi, per esempio, che in senso distribuzionale la moltiplicazione tra campi valutati nello stesso punto dello spaziotempo non è nemmeno definita.

Una trattazione equivalente, ma più utile per la comprensione delle conseguenze dello schema di quantizzazione, si può ottenere se si considera che $\{u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})\}$ è un insieme completo di soluzioni ortonormali di (2.1), sicché si abbia quanto mostrato in (2.11).

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \left[a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} \overline{u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})} \right] \quad (2.11)$$

Al fine di imporre le CCR sull'espansione di $\varphi(t, \mathbf{x})$ in termini delle $u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})$ dovremo considerare indipendenti gli operatori $a_{\mathbf{k}}$ e $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$. Troveremo la forma (2.12) per le CCR.

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = 0 \quad (2.12a)$$

$$[a_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = 0 \quad (2.12b)$$

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \mathbb{1} \quad (2.12c)$$

Nella rappresentazione di Fock dello spazio di Hilbert \mathcal{H} degli stati, una base per \mathcal{H} può essere ottenuta tramite l'azione degli operatori $a_{\mathbf{k}}$ e $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ sul vettore $|0\rangle$, detto *stato di vuoto*, tale per cui $a_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0$, qualunque sia \mathbf{k} . Lo stato ottenuto tramite l'azione di $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ su $|0\rangle$ è interpretato come uno stato di singola particella $a_{\mathbf{k}}^{\dagger} |0\rangle = |1_{\mathbf{k}}\rangle$. Nello stesso modo è possibile costruire stati a più particelle

$$a_{\mathbf{k}_1}^{\dagger} \dots a_{\mathbf{k}_n}^{\dagger} |0\rangle = |1_{\mathbf{k}_1}; \dots; 1_{\mathbf{k}_n}\rangle \quad (2.13)$$

e, ammettendo che alcuni $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ possano essere ripetuti

$$\left(a_{\mathbf{k}_1}^\dagger\right)^{n^{(1)}} \dots \left(a_{\mathbf{k}_j}^\dagger\right)^{n^{(j)}} |0\rangle = \sqrt{n^{(1)}! \dots n^{(j)}!} |n_{\mathbf{k}_1}^{(1)}; \dots; n_{\mathbf{k}_j}^{(j)}\rangle \quad (2.14)$$

Questo ci permette di dedurre l'azione di $a_{\mathbf{k}}$ e di $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ sul generico stato $|n_{\mathbf{k}}\rangle$.

$$a_{\mathbf{k}}^\dagger |n_{\mathbf{k}}\rangle = \sqrt{n+1} |(n+1)_{\mathbf{k}}\rangle \quad (2.15a)$$

$$a_{\mathbf{k}} |n_{\mathbf{k}}\rangle = \sqrt{n} |(n-1)_{\mathbf{k}}\rangle \quad (2.15b)$$

L'interpretazione da fornire allo spazio di Fock così costruito è fornita naturalmente dall'analisi dell'hamiltoniano e dell'operatore momento associati al sistema in esame. Si trova che tanto H quanto \mathbf{P} commutano con l'operatore $N_{\mathbf{k}_i} = a_{\mathbf{k}_i}^\dagger a_{\mathbf{k}_i}$, detto *operatore numero per il modo \mathbf{k}_i* , e pertanto commutano anche con l'*operatore numero totale* $N = \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}$.

Procedendo con l'analisi della quantizzazione per il campo scalare, possiamo calcolare il tensore energia momento a partire dalla lagrangiana (2.2), e otteniamo il risultato (2.16).

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) \quad (2.16)$$

Dall'espressione per $T_{\alpha\beta}$ è quindi immediato ottenere l'energia e il momento associati al campo, come in (2.17).

$$H = \int_{\Sigma} T_{00} d\mathbf{x} \quad (2.17a)$$

$$P_a = \int_{\Sigma} T_{0a} d\mathbf{x} \quad (2.17b)$$

Gli autostati di $N_{\mathbf{k}}$ sono autostati anche di \mathbf{P} e di H e $\langle n_{\mathbf{k}_1}; \dots | N_{\mathbf{k}_i} | n_{\mathbf{k}_1}; \dots \rangle =$

$n^{(i)}$: aumentare di un'unità $n^{(i)}$ corrisponde ad aumentare H di ω_i e \mathbf{P} di \mathbf{k}_i . Di conseguenza interpretiamo $N_{\mathbf{k}}$ come il numero di quanti di energia ω e momento \mathbf{k} presenti nel modo di indice \mathbf{k} .

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger \right) \omega \quad (2.18a)$$

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \quad (2.18b)$$

Ora l'analisi del valore d'aspettazione dell'energia sul vuoto $\langle 0 | H | 0 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \omega/2$ ci mostra come questo sia infinito. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^{d-1} \int \omega_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{L^2}{4\pi} \right)^{(d-1)/2} \frac{1}{\Gamma[(d-1)/2]} \int_0^\infty \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} |\mathbf{k}|^{d-2} d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.19)$$

e l'integrale diverge come $|\mathbf{k}|^d$ per grandi $|\mathbf{k}|$. Tale problema può essere risolto se facciamo uso dell'operazione di normale ordinamento, che riordina tutti gli operatori di creazione $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ a sinistra di quelli di distruzione $a_{\mathbf{k}}$, ovvero : $a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger := a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$. Tramite questa procedura di *rinormalizzazione* $\langle 0 | : H : | 0 \rangle$ assume un valore finito.

2.2 Funzioni di Green

Per ricostruire la fisica di un sistema, è spesso utile considerare l'aspettazione sullo stato di vuoto di prodotti di campi. I vari prodotti di due operatori di campo possono essere identificati con le cosiddette *funzioni di Green* associate ad un sistema. Potremo allora introdurre la funzione di Schwinger, (2.20a) $G(x, x')$, la funzione elementare di Hadamard $G^{(1)}(x, x')$, (2.20b) e le funzioni di Wightman $G^\pm(x, x')$, definite come le parti di frequenza positiva e negativa di (2.20a) e di

(2.20b).

$$iG(x, x') = \langle 0 | [\varphi(x), \varphi(x')] | 0 \rangle = G^+(x, x') - G^-(x, x') \quad (2.20a)$$

$$G^{(1)}(x, x') = \langle 0 | \{\varphi(x), \varphi(x')\} | 0 \rangle = G^+(x, x') + G^-(x, x') \quad (2.20b)$$

In termini della funzione di Green di Feynman si possono definire le funzioni di Green avanzate e ritardate, come in (2.20c)-(2.20e).

$$iG_F(x, x') = \langle 0 | T\varphi(x)\varphi(x') | 0 \rangle = \theta(t - t')G^+(x, x') + \theta(t' - t)G^-(x, x') \quad (2.20c)$$

$$G^{\text{adv}}(x, x') = \theta(t' - t)G(x, x') \quad (2.20d)$$

$$G^{\text{ret}}(x, x') = -\theta(t - t')G(x, x') \quad (2.20e)$$

Ciascuna delle funzioni di Green precedenti soddisfa un'equazione differenziale. Per esempio, chiamando \mathcal{G} una qualunque tra G , $G^{(1)}$ e G^\pm , notiamo che vale l'equazione (2.21a).

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\mathcal{G}(x, x') = 0 \quad (2.21a)$$

Le funzioni di Green avanzate, ritardate e di Feynman soddisfano equazioni differenziali differenti da (2.21a), che possono essere ottenute ricordando che $\partial_t \theta(t - t') = \delta(t - t')$.

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)G_F(x, x') = -\delta(x - x') \quad (2.21b)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)G^{\text{ret/adv}}(x, x') = \delta(x - x') \quad (2.21c)$$

Ciascuna delle funzioni di Green introdotte precedentemente, inoltre, può essere riscritta in forma integrale, qualora si sostituisca l'espansione (2.11) nelle definizioni (2.20a)-(2.20e). Il risultato può essere sintetizzato nella forma seguente, dove \mathcal{C} è un cammino appropriato, che incorpora le condizioni al contorno da imporre per ottenere ciascuna delle funzioni (2.20a)-(2.20e).

$$\mathcal{G}(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathcal{C}} \frac{\exp[\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \mathbf{i}k^0(t - t')]}{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2 - m^2} d^d k \quad (2.22)$$

Il cammino d'integrazione \mathcal{C} utilizzato per ottenere la funzione di Green secondo la prescrizione di Feynman sarà quello mostrato in figura 2.1. Il risultato che si

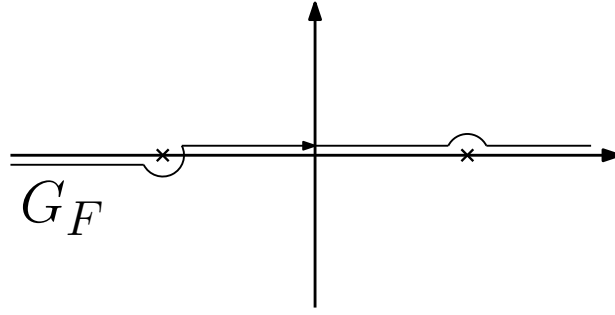


FIGURA 2.1. Cammino di integrazione da utilizzare in (2.22) per ottenere $G_F(x, x')$.

ottiene per $G_F(x, x')$ può essere scritto come in (2.23), dove $H_k^{(2)}$ è una funzione di Hankel del secondo tipo e $\sigma = (x - x')^2/2$, [5].

$$G_F(x, x') = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\mathbf{i}\pi}{(4\pi\mathbf{i})^{d/2}} \left(\frac{2m^2}{-\sigma + \mathbf{i}\epsilon} \right)^{(d-2)/4} H_{(d-2)/2}^{(2)} \left[2m^2 \sqrt{\sigma - \mathbf{i}\epsilon} \right] \right\} \quad (2.23)$$

La rappresentazione (2.23) di $G_F(x, x')$ indica chiaramente come questa possa essere presa come il valore alla frontiera (in senso distribuzionale) di una funzione analitica nel semipiano inferiore in σ .

2.3 Quantizzazione su spazi curvi

2.3.1 Proprietà globali dello spaziotempo: iperbolicità

Nel caso in cui si voglia generalizzare la procedura di quantizzazione dei campi nel contesto della Relatività Generale, è necessario tener presente cosa si intende per spaziotempo. Normalmente, nell'ambito della QFT su spazi curvi, si assume che lo spaziotempo sia una varietà differenziabile \mathcal{M} di classe \mathcal{C}^∞ , globalmente iperbolica, su cui sia definito un campo tensoriale \mathbf{g} , la metrica, che rappresenta l'azione gravitazionale.² La condizione di iperbolicità globale pare essere fondamentale per l'interpretabilità fisica della QFT, in quanto garantisce l'esistenza di una superficie di Cauchy Σ in \mathcal{M} . Ora, una superficie di Cauchy è un'ipersuperficie acronale di \mathcal{M} che viene intersecata esattamente una volta da ciascuna curva inestensibile futura, ovvero $D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma) = \mathcal{M}$. Tale condizione ci assicura pertanto che i problemi di Cauchy su Σ siano ben posti e che, conseguentemente, \mathcal{M} possieda una coordinata temporale globale. Se \mathcal{M} non è globalmente iperbolica, allora, data una qualunque superficie acronale (per esempio spaziale) Σ , almeno uno tra $D^+(\Sigma)$ e $D^-(\Sigma)$ possiede una frontiera in \mathcal{M} . In questo caso si definisce orizzonte di Cauchy l'insieme $H^\pm = \partial D^\pm(\Sigma)$. Come esempio, la figura 2.2 mostra i diagrammi di Carter-Penrose di due spazi notevoli: lo spaziotempo di Minkowski (a) e lo spaziotempo di Anti-de Sitter. Si può notare immediatamente come il primo dei due sia globalmente iperbolico, e tanto Σ_1 quanto Σ_2 siano due superfici di Cauchy ammissibili, mentre lo spaziotempo di Anti-de Sitter ammette l'esistenza di un orizzonte di Cauchy, e per tale motivo non è globalmente iperbolico. Lo spaziotempo di Anti-de Sitter, come già evidenziato nel capitolo 1, risulta inoltre

²Rigorosamente, allora, uno spaziotempo è una coppia $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, con \mathbf{g} metrica lorentziana soluzione delle equazioni di Einstein. In effetti, tuttavia, è possibile che esistano più realizzazioni equivalenti del medesimo spaziotempo qualora, dati $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ e $(\mathcal{M}', \mathbf{g}')$, si trovi un diffeomorfismo $\theta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$, tale per cui $\theta^* \mathbf{g}' = \mathbf{g}$. Considerato questo fatto, pare più opportuno parlare di spaziotempo come di una classe di equivalenza di coppie $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, secondo la relazione di equivalenza appena definita.

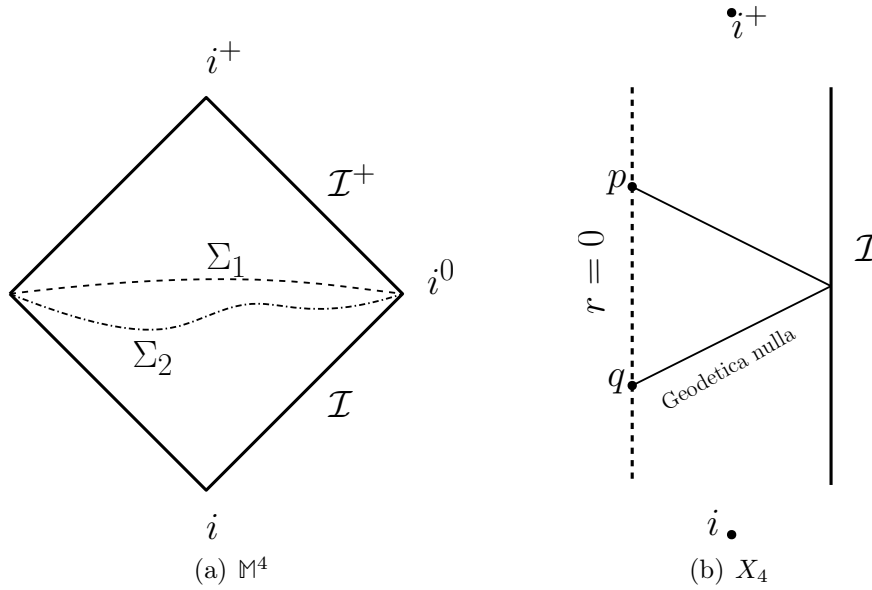


FIGURA 2.2. Esempio di uno spazio globalmente iperbolico (a) e di uno non globalmente iperbolico (b)

essere affetto da alcune patologie che paiono inficiarne un possibile utilizzo come spazio ambiente per una teoria fisica (si consideri per esempio il fatto che esistano curve temporali chiuse passanti attraverso qualunque punto di X_d se $d > 2$). L'interesse nello studio di teorie di campo quantistiche su X_d , tuttavia, risiede soprattutto nella cosiddetta *corrispondenza AdS-CFT*, che congettura l'equivalenza di teorie di campo conformi con teorie di campo (stringhe, per esempio) sul bordo all'infinito di X_d .

Per quanto detto, allora, su spazi non globalmente iperbolici non è sufficiente una condizione iniziale per definire univocamente un problema di Cauchy, ma sarà necessario anche dare una qualche condizione al bordo (su X_d si può scegliere di imporre una condizione sul bordo all'infinito).

2.3.2 Proprietà globali dello spaziotempo: simmetrie

Spesso risulta utile prendere in analisi spazi dotati di particolari simmetrie geometriche. Tali simmetrie possono essere studiate ricorrendo a varie descrizioni, tra le quali abbiamo la teoria dei gruppi di Lie, e i vettori di Killing di

una metrica. Adottiamo qui il secondo punto di vista. Sia allora ϕ_t un gruppo a un parametro di trasformazioni su \mathcal{M} , ovvero $\phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, in modo che $\phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t = \phi_{t+s} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ e $\phi_0 \circ \phi_t = \phi_t \circ \phi_0 = \phi$. Affinché ϕ_t sia un gruppo a un parametro di *isometrie* di \mathcal{M} è necessario che ϕ lasci invariata la metrica \mathbf{g} , ovvero $\phi_t^* \mathbf{g} = \mathbf{g}$. Scopriremo che tale condizione è in realtà equivalente all'esistenza di campo vettoriale ξ^a che soddisfi l'*equazione di Killing* (2.24). Tale campo ξ sarà detto allora *campo o vettore di Killing*.

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = \nabla_{(a} \xi_{b)} = 0 \quad (2.24)$$

Supponiamo infatti che ϕ_t sia il gruppo a un parametro di trasformazioni generato dal campo \mathbf{K} e che sia uno spostamento della metrica, vale allora l'equazione (2.25).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{K}} \mathbf{g} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\mathbf{g} - \phi_t^* \mathbf{g}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ora tuttavia $\mathcal{L}_{\mathbf{K}} \mathbf{g} = 2\nabla_{(a} K_{b)}$, da cui si ottiene (2.24). Viceversa, se ξ è un campo di Killing, cioè se $\nabla_{(a} \xi_{b)} = 0$, il flusso ϕ generato da ξ è un gruppo a un parametro di simmetrie per $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$.

L'insieme di tutti i vettori di Killing linearmente indipendenti ξ_α , $\alpha = 1, \dots, n$ di una varietà d -dimensionale \mathcal{M} genera inoltre un'algebra di Lie di dimensione n su \mathbb{R} , con prodotto fornito dal commutatore $[\cdot, \cdot]$ e $n \leq d(d+1)/2$. I flussi generati dai vari ξ_α generano a loro volta un gruppo di Lie di isometrie di \mathcal{M} . Ovviamente il gruppo globale degli spostamenti della metrica di \mathcal{M} può contenere trasformazioni discrete, che non possono essere generate né individuate per mezzo dei vettori di Killing.

2.3.3 Unicità del vuoto e trasformazioni di Bogolyubov

Nonostante sarà in seguito necessaria una generalizzazione, consideriamo per il momento di voler quantizzare un campo scalare di Klein-Gordon su uno spazio-tempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ che sia globalmente iperbolico. La generalizzazione più immediata per l'azione (2.2), che consideri anche l'accoppiamento con il campo gravitazionale, è fornita dall'equazione (2.26).

$$\mathcal{L}(\varphi, \nabla_\mu \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{g(x)} [g_{\mu\nu}(x) \nabla_\mu \varphi(x) \nabla_\nu \varphi(x) - (m^2 + R(x)\xi) \varphi^2(x)] \quad (2.26)$$

In (2.27), l'accoppiamento tra campo gravitazionale e campo scalare è fornito da $R\xi\varphi^2$, dove $R = \text{Tr}_{(a,b)} \mathbf{R}(a, b)$ è lo scalare di Ricci, mentre ξ è un parametro reale. Tale termine è stato scelto come rappresentante l'interazione di un campo di Klein-Gordon con il campo gravitazionale in quanto è il termine scalare più semplice che sia locale e che sia dimensionalmente corretto. La variazione dell'azione definita dalla densità di lagrangiana (2.27) fornirà allora le equazioni del moto (2.27) per $\varphi(x)$.

$$[\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2 + \xi R(x)] \varphi(x) = 0 \quad (2.27)$$

L'inclusione di un parametro ξ nella lagrangiana (2.26) rende possibile studiare diversi regimi dell'accoppiamento di φ con \mathbf{g} . In particolare sono interessanti i casi di *accoppiamento minimale*, quando $\xi = 0$, e di *accoppiamento conforme*, quando $\xi = (n-2)/4(n-1)$. Nel secondo caso, se $m = 0$ l'azione e, quindi, le equazioni del moto risultano invarianti per trasformazioni conformi $\tilde{g}_{ab}(x) = \Omega^2(x)g_{ab}(x)$ qualora il campo si trasformi secondo $\tilde{\varphi}(x) = \Omega^{(2-n)/2}(x)\varphi(x)$.

Ora, esiste un insieme completo di soluzioni di (2.27), che sia inoltre un insieme di funzioni ortonormali nel senso del prodotto scalare definito in (2.28), dove $g =$

$|\det \mathbf{g}|$, e l'ipersuperficie Σ è una superficie di Cauchy di \mathcal{M} .

$$(\phi, \psi) = -i \int_{\Sigma} \sqrt{g_{\Sigma}(x)} \phi(x) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \overline{\psi(x)} d\Sigma^{\mu} \quad (2.28)$$

Se $\{u_n(x)\}$ indica tale sistema ortornormale e completo di soluzioni, possiamo espandere $\varphi(x)$ come già precedentemente mostrato.

$$\varphi(x) = \sum_n \left[a_n u_n(x) + a_n^{\dagger} \overline{u_n(x)} \right] \quad (2.29)$$

La procedura di quantizzazione del campo allora segue dalla promozione di φ , a e a^{\dagger} al rango di operatori e dall'imposizione delle CCR $[a_n, a_m] = [a_n^{\dagger}, a_m^{\dagger}] = 0$, $[a_n, a_m^{\dagger}] = \delta_{nm}$. Prima di discutere la costruzione dello spazio di Fock $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ è tuttavia necessario mettere in luce una differenza sostanziale rispetto al caso Minkowskiano. Nello spazio di Minkowski, infatti, è presente un sistema di coordinate privilegiato, ovvero quello rettangolare (t, x, y, z) , corrispondente al gruppo di Poincaré dei movimenti della metrica \mathbf{g} . In questo modo sullo spazio di Minkowski emerge un SONC³ di soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon che è naturale, nel senso dell'essere associato a un simile sistema privilegiato di coordinate. Più rigorosamente, su \mathbb{M}^d esiste un vettore di Killing ∂_t ortogonale alla superficie spaziale definita da t costante. I modi naturali $u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})$ sono le autofunzioni di ∂_t con autovalore $-i\omega$, con la condizione di positività sulla frequenza $\omega > 0$. Passando invece al caso di uno spaziotempo curvo in Relatività Generale, non è più garantito che il gruppo di Poincaré sia il gruppo di simmetria della varietà spaziotemporale \mathcal{M} . In effetti, in generale, \mathcal{M} potrebbe non possedere alcun vettore di Killing rispetto al quale sia possibile definire i modi di frequenza positiva. In questo modo non esiste, in generale, un sistema di coordinate privilegiato e non è possibile identificare una scomposizione in modi di $\varphi(x)$ basata sulla separazione delle variabili per l'equazione d'onda in tale sistema privilegiato di coordinate. Questo impone una certa

³Sistema OrtoNormale Completo

arbitrarietà anche sulla costruzione dello spazio di Fock \mathcal{F}_S . Se ricerchiamo allora un nuovo SONC di soluzioni di (2.27), sia per esempio $v_n(x)$, possiamo ottenere una nuova, equivalente, scomposizione di $\varphi(x)$ in termini di $v_n(x)$.

$$\varphi(x) = \sum_n \left[\tilde{a}_n v_n(x) + \tilde{a}_n^\dagger \overline{v_n(x)} \right] \quad (2.30)$$

Pertanto, la quantizzazione canonica effettuata su (2.29) e su (2.30) permette di definire due differenti stati di vuoto, tramite $a_n |0\rangle = 0$ e $\tilde{a}_n |\tilde{0}\rangle = 0$. Su tali stati $|0\rangle$ e $|\tilde{0}\rangle$ si possono costruire gli spazio di Fock \mathcal{F}_S e $\tilde{\mathcal{F}}_S$. Le cosiddette trasformazioni di Bogolyubov (2.31) forniscono allora i coefficienti dell'espansione dei due SONC, uno in termini dell'altro.

$$v_n = \sum_m [\alpha_{nm} u_m + \beta_{nm} \overline{u_m}] \quad (2.31a)$$

$$u_n = \sum_m [\bar{\alpha}_{nm} v_m - \bar{\beta}_{nm} \overline{v_m}] \quad (2.31b)$$

Tramite queste trasformazioni si possono allora mettere in relazione anche a_n , a_n^\dagger con \tilde{a}_n , \tilde{a}_n^\dagger .

$$a_n = \sum_m [\alpha_{mn} \tilde{a}_m + \bar{\beta}_{mn} \tilde{a}_m^\dagger] \quad (2.32a)$$

$$\tilde{a}_n = \sum_m [\bar{\alpha}_{nm} a_m - \bar{\beta}_{nm} a_m^\dagger] \quad (2.32b)$$

Questo ci permette immediatamente di verificare che gli spazi di Fock \mathcal{F}_S e $\tilde{\mathcal{F}}_S$ sono differenti. Se, infatti, consideriamo l'azione di a_n su $|\tilde{0}\rangle$ troviamo che $|\tilde{0}\rangle$ non è annichilito da a_n . Infatti

$$a_n |\tilde{0}\rangle = \sum_m \bar{\beta}_{mn} |\tilde{\mathbf{1}}_m\rangle \neq 0 \quad (2.33)$$

Se, invece, è possibile trovare un SONC di modi di frequenza positiva rispetto ad

un campo di Killing ξ di tipo tempo (equazione (2.34)) e v_m possono essere espresse unicamente in termini delle u_n , allora $\beta_{ij} = 0$ e gli spazi di Fock \mathcal{F}_S e $\tilde{\mathcal{F}}_S$ sono coincidenti a meno di trasformazioni unitarie.

$$\mathcal{L}_\xi u_n = -i\omega u_n \tag{2.34}$$

2.4 Approccio assiomatico alla QFT

Abbiamo visto come la quantizzazione canonica di un campo su spaziotempo curvo sia affetta da patologie quali la non-unicità del vuoto. Questo impedisce allora di imporre una condizione energetica sui campi in esame che implichi la stabilità della teoria. Se, infatti, nel caso della QFT su spaziotempo piatto è possibile richiedere che l'energia abbia un limite inferiore, fornito dal valore d'aspettazione dell'energia sul vuoto $|0\rangle$, questo diviene automaticamente inapplicabile nel caso di teorie quantistiche di campo su spaziotempo curvo. Questo aspetto è tanto più evidente se consideriamo anche il fatto che in uno spaziotempo curvo l'operatore energia debba essere ridotto al generatore infinitesimale di un qualche gruppo di isometrie ad un parametro, che viene normalmente interpretato come l'evoluzione in tempo proprio di un determinato osservatore. In questo senso non è possibile, in generale, caratterizzare il vuoto come lo stato di minima energia nella maniera canonica. Per questo ed altri motivi proliferano tecniche di quantizzazione non canoniche, che mirano a risolvere l'ambiguità intrinseca di una generalizzazione diretta dei metodi adottati su \mathbb{M}^d . Nei prossimi paragrafi riassumeremo allora l'approccio assiomatico dovuto a Wightman [51][35], concentrandoci dapprima su un riassunto dell'approccio algebrico alla meccanica quantistica, culminante nel teorema di Gelfand-Naimark [28] e nella costruzione GNS [28][50], per poi generalizzare al caso delle teorie di campo.

2.4.1 Approccio algebrico alla Meccanica Quantistica

Ricordiamo che in meccanica classica si descrive solitamente lo stato di un sistema tramite le coordinate canoniche (q, p) nello spazio delle fasi Γ , dove q e p indicano, in generale, la collettività delle coordinate $\{q_i\}$ e dei momenti canonici ad esse coniugati $\{p_i\}$, $i = 1, \dots, N$. Le osservabili saranno allora definite come funzioni delle coordinate canoniche $f(q, p)$, purché f sia sufficientemente regolare. Dal momento che possiamo sicuramente includere tra le osservabili di un sistema le coordinate medesime e l'insieme dei loro polinomi, prenderemo f nella chiusura di tale insieme secondo la norma $\|f\|_\infty$, ovvero $f \in \mathcal{C}^0(\Gamma, \mathbb{R})$. L'evoluzione delle coordinate canoniche $q_{t_0} \rightarrow q_t$, $p_{t_0} \rightarrow p_t$ e delle osservabili $f(q_{t_0}, p_{t_0}) \rightarrow f(q_t, p_t) = f_t(q, p)$ è definita dalle equazioni di Hamilton (2.35).

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} = \{q, H\} \quad (2.35a)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} = \{p, H\} \quad (2.35b)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \quad (2.35c)$$

Le parentesi di Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ forniscono allora lo spazio delle fasi Γ di una struttura simplettica, e la quantizzazione canonica nasce effettivamente da una generalizzazione delle parentesi canoniche $\{q_m^i, q_n^j\} = \{p_m^i, p_n^j\} = 0$ e $\{q_j^i, p_n^j\} = \delta_{mn} \delta^{ij}$.

Se estendiamo la nostra definizione di osservabili da funzioni $f \in \mathcal{C}^0(\Gamma, \mathbb{R})$ a $f \in \mathcal{C}^0(\Gamma, \mathbb{C})$, allora queste formano evidentemente un'algebra commutativa \mathcal{A} sui complessi dotata di elemento neutro $f(x) = 1$ e prodotto definito dalla moltiplicazione punto per punto $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Tale algebra \mathcal{A} è inoltre una $*$ -algebra se si prende come involuzione la coniugazione complessa $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Ancora, \mathcal{A}

può essere reso uno spazio normato purché si prenda $\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{x \in \Gamma} |f(x)|$. Questo, in realtà, rende \mathcal{A} non solo uno spazio normato, ma uno spazio di Banach, con prodotto continuo rispetto alla topologia indotta dalla norma, dal momento che $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$. Infine $\|f^*f\| = \|f\|^2$ e questo rende \mathcal{A} una C^* -algebra abeliana. Queste considerazioni e altre, di carattere fisico, ci portano ad una riformulazione algebrica della meccanica classica.

La caratterizzazione di uno stato ω di un sistema fisico, infatti, è fornita dalla misura sperimentale delle sue osservabili. Tale misura sperimentale consiste allora in un insieme di n misurazioni $m_\omega^{(i)}(f)$ e i valori fisicamente interessanti sono allora il valore medio $\langle f \rangle_\omega^{(n)}$ e la varianza $(\Delta_\omega^{(n)} f)^2$. Questo ci permette allora di identificare naturalmente lo stato di un sistema con un funzionale $\omega \in \mathcal{A}^*$ agente sulle osservabili di un sistema $f \in \mathcal{A}$ in modo che $\omega(f)$ riproduca il valore d'aspettazione di f , definito come $\omega(f) = \langle f \rangle_\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f \rangle_\omega^{(n)}$. In questo modo l'incertezza sul risultato di una misura sperimentale di f è codificato in $(\Delta_\omega f)^2 = \omega[(f - \omega(f))^2]$. Questo approccio risolve allora l'idealizzazione intrinseca nella definizione di osservabile, che assume di poter univocamente determinare un sistema tramite la misura infinitamente precisa delle coordinate canoniche. Inoltre, l'interpretazione che ci ha portato a definire lo stato di un sistema come un funzionale sull'algebra delle osservabili impone che tale funzionale sia positivo, ovvero $\omega(f^*f) \geq 0, \forall f \in \mathcal{A}$, e questo implica la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz $|\omega(A^*B)| \leq \omega^{1/2}(A^*A)\omega^{1/2}(B^*B)$. In questo contesto, l'evoluzione invariante per inversione temporale di uno stato è fornita da un gruppo a un parametro di $*$ -automorfismo α_t di \mathcal{A} , in modo che $\omega_t(f) = (\alpha_t^* \omega)(f) = \omega(\alpha_t f)$, con $f \in \mathcal{A}$. Inoltre, data la continuità nel tempo, α_t deve essere debolmente continua nel senso che, dato uno stato ω , $\omega_t(f)$ deve essere continuo nel parametro t per ogni $f \in \mathcal{A}$. La meccanica classica può così essere riformulata in base ai seguenti postulati.

Postulato 1 - Osservabili

Le osservabili di un sistema formano una C^* -algebra \mathcal{O} . Un'osservabile $A \in \mathcal{O}$ è detto essere positivo se qualunque misura di \mathcal{A} fornisce un risultato positivo. In questo caso, esiste un $B \in \mathcal{O}$ tale per cui $A = B^2$. Inoltre, data un'osservabile F e due polinomi positivi $\mathcal{P}_1(F)$ e $\mathcal{P}_2(F)$, anche il loro prodotto è positivo.

Postulato 2 - Stati

Lo stato di un sistema è una classe di equivalenza $[\omega]$ di funzionali reali positivi ω su \mathcal{O} . Data l'interpretazione di $\omega(A)$ come $\langle A \rangle_\omega$, gli stati debbono essere rappresentati da funzionali omogenei: $\omega(\lambda A) = \lambda \omega(A)$. La relazione di equivalenza che definisce $[\omega]$ identifica due stati $\omega_1 \sim \omega_2$ se $\omega_1(A) = \omega_2(A)$, $\forall A \in \mathcal{O}$: le osservabili separano gli stati.

Postulato 3 - Evoluzione temporale

L'evoluzione temporale delle osservabili è fornita dai gruppi ad un parametro di $*$ -automorfismo di \mathcal{O} . Se α_t è un possibile flusso per l'evoluzione in \mathcal{O} , l'evoluzione degli stati sarà fornita da $\omega_t(A) = \alpha_t^* \omega(A) = \omega(\alpha_t A)$.

Una domanda naturale che emerge, a questo punto, è cosa differenzi la meccanica classica dalla meccanica quantistica. Notiamo che, data l'algebra che abbiamo definito nel caso della meccanica classica, è sempre possibile misurare simultaneamente due osservabili $A, B \in \mathcal{O}$ con dispersione piccola a piacere. Tuttavia questo non è possibile in meccanica quantistica, in quanto la relazione di indeterminazione di Heisenberg impone $\Delta q_j \Delta p_j \gtrsim \hbar/2$. Cosa impone questa relazione se cerchiamo di estendere l'approccio algebrico alla meccanica classica anche alla meccanica quantistica? Prendiamo due osservabili $A = A^*$ e $B = B^*$, per semplicità siano di media nulla, e calcoliamo $\Delta_\omega A \Delta_\omega B = \sqrt{\omega(A^2)} \sqrt{\omega(B^2)}$. Consideriamo allora

$C = A + i\lambda B$ e la positività di ω , $\omega(C^*C) \geq 0$, implica

$$\omega(A^2) + |\lambda|^2\omega(B^2) + i\lambda\omega([A, B]) \geq 0 \quad (2.36)$$

Dal momento che l'ultimo termine è reale, la positività della forma quadratica in λ impone $4\omega(A^2)\omega(B^2) \geq |\omega([A, B])|^2$, da cui $\Delta_\omega A \Delta_\omega B \geq |\omega([A, B])|/2$. Pertanto la meccanica quantistica non può essere descritta per mezzo di una C^* -algebra commutativa di osservabili. Inoltre, dal momento che le relazioni di indeterminazione di Heisenberg per $A = q_j$ e $B = p_j$ sono indipendenti dallo stato ω , allora $[q_j, p_j]$ deve essere un multiplo dell'elemento neutro dell'algebra, supponendo che gli stati siano normalizzati $\omega(\mathbf{1}) = 1$. Allora, dal momento che $[q_i, p_j]^* = -[q_i, p_j]$, possiamo imporre $[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$. La costruzione GNS, come vedremo, permette di rappresentare le osservabili nell'algebra \mathcal{O} con operatori su spazi di Hilbert. Le regole di commutazione $[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ implicano allora che la rappresentazione in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ di \mathcal{O} sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} non possa essere finito-dimensionale.⁴

La domanda spontanea è ora come sia possibile applicabile una simile struttura astratta alla soluzione di problemi concreti. La risposta viene dal teorema di Gelfand-Naimark e dalla costruzione Gelfand-Naimark-Segal (GNS). Se \mathcal{A} e \mathcal{B} sono due C^* -algre con identità potremo allora definire gli $*$ -omomorfismi come le mappe $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ che preservano tutte le operazioni su \mathcal{A} , e l'involuzione $*$. Uno $*$ -omomorfismo è lineare $\pi(\lambda A + \mu B) = \lambda\pi(A) + \mu\pi(B)$, moltiplicativo $\pi(AB) = \pi(A)\pi(B)$ e preserva l'involuzione $\pi(A^*) = [\pi(A)]^*$. Tale omomorfismo sarà allora uno $*$ -isomorfismo se è anche biiettivo, e uno $*$ -automorfismo se $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.

Definizione 2. *Uno $*$ -omomorfismo π da una C^* -algebra \mathcal{A} alla C^* -algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ degli operatori continui e lineari su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} è detta una rappresentazione di \mathcal{A} in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Tale rappresentazione sarà detta fedele se $\ker \pi =$*

⁴Se infatti lo fosse, e indichiamo con n la dimensione, potremmo prendere la traccia delle regole di commutazione, ottenendo $\text{Tr}[q_i, p_j] = i\hbar \text{Tr} \mathbf{1} = ni\hbar$. Tuttavia la traccia è lineare e ciclica, quindi il membro sinistro dell'uguaglianza sarebbe nullo.

$\{0\}$ e irriducibile se 0 e \mathcal{H} sono gli unici sottoinsiemi di \mathcal{H} invarianti sotto l'azione di $\pi(\mathcal{A})$.

Un vettore $\Psi \in \mathcal{H}$ sarà detto invece *ciclico* se $\pi(\mathcal{A})\Psi$ è denso in \mathcal{H} . Se $\pi(\mathcal{A})$ è una rappresentazione irriducibile in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, allora qualunque vettore di \mathcal{H} è ciclico. Una rappresentazione π di una C^* -algebra \mathcal{A} in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} dotato di un vettore Ψ ciclico sotto $\pi(\mathcal{A})$ viene solitamente denotata tramite la terna (\mathcal{H}, π, Ψ) .

La costruzione GNS dimostra che ogni stato ω su una C^* -algebra \mathcal{A} identifica una rappresentazione π_ω con importanti proprietà per il collegamento con la descrizione standard della meccanica quantistica.

Teorema 1 (Costruzione GNS). *Sia \mathcal{A} una C^* -algebra e ω uno stato su \mathcal{A} . Esiste uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_ω e una rappresentazione π_ω di \mathcal{A} negli operatori continui limitati di \mathcal{H}_ω in maniera tale che*

1. $\mathcal{H}(\omega)$ possiede un vettore ciclico Ψ_ω sotto $\pi(\mathcal{A})$
2. Dato $A \in \mathcal{A}$, $\omega(A) = (\Psi_\omega, \pi_\omega(A)\Psi_\omega)$
3. Qualunque altra rappresentazione $\tilde{\pi}_\omega$ di \mathcal{A} su $\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}}_\omega)$ soddisfacente alle proprietà precedenti è unitariamente equivalente a π_ω . Questo significa che esiste un'isometria $U : \tilde{\mathcal{H}}_\omega \rightarrow \mathcal{H}_\omega$ in modo che $U\tilde{\pi}_\omega(A)U^{-1} = \pi_\omega(A)$ e $U\tilde{\Psi}_\omega = \Psi_\omega$.

Dimostrazione. Se si considera \mathcal{A} come uno spazio vettoriale, uno stato ω definisce su \mathcal{A} un prodotto semidefinito positivo, che indicheremo $(A, B) = \omega(A^*B)$. Introducendo l'ideale sinistro $J = \{A \in \mathcal{A} : \omega(B^*A) = 0, \forall B \in \mathcal{A}\}$ di \mathcal{A} , il completamento di \mathcal{A}/J rispetto alla topologia indotta dal prodotto interno già definito, che su \mathcal{A}/J risulta positivo, è uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_ω . Allora possiamo definire $\pi_\omega(A)[B] = [AB]$, dove $[A] \in \mathcal{A}/J$, e si può verificare semplicemente, data la positività di ω , che $\|\pi_\omega(A)[B]\|^2 \leq \|A\|^2$. Dato che $\pi(A)^*[B] = \pi(A^*)[B]$, π è uno $*$ -omomorfismo che mappa \mathcal{A} su $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$. Se, infine, si identifica Ψ_ω con $[1]$ otteniamo $\pi_\omega[A]\Psi_\omega = [A]$ e $(\Psi_\omega, \pi_\omega(A)\Psi_\omega) = ([1], [A]) = \omega(1^*A) = \omega(A)$.

Se, da ultimo, scegliamo una differente rappresentazione $\tilde{\pi}_\omega$ di \mathcal{A} in $\tilde{\mathcal{H}}_\omega$ con vettore ciclico $\tilde{\Psi}_\omega$, possiamo definire la trasformazione unitaria U tramite $U^{-1}\pi_\omega(A)\Psi_\omega = \tilde{\pi}_\omega(A)\tilde{\Psi}_\omega$. La U^{-1} così definita preserva le norme e mappa \mathcal{H}_ω in un sottoinsieme denso di $\tilde{\mathcal{H}}_\omega$, e questo rende possibile estendere U in maniera univoca ad una mappa unitaria $U : \tilde{\mathcal{H}}_\omega \rightarrow \mathcal{H}_\omega$. \square

È interessante allora notare come la base matematica alla Dirac-von Neumann della meccanica quantistica non debba essere postulata, qualora si realizzi che le osservabili di un sistema formano una C^* -algebra non commutativa. Inoltre, una volta che si sia trovata la rappresentazione π_ω dell'algebra \mathcal{A} sullo spazio di Hilbert \mathcal{H}_ω , i vettori $\Phi \in \mathcal{H}_\omega$ definiscono degli stati dal momento che $\varphi(A) = (\Phi, \pi_\omega(A)\Phi)$ è un funzionale reale positivo su \mathcal{A} . Dal momento che $\pi_\omega(A)\Psi_\omega$ è denso in \mathcal{H}_ω al variare di $A \in \mathcal{A}$, si possono interpretare gli stati $\Phi \leftrightarrow \varphi$ come quelli ottenuti agendo su ω per mezzo delle osservabili, e questo incorpora le operazioni fisiche che possono essere eseguite su un sistema in laboratorio.

Se, tuttavia, il teorema GNS consente, dato uno stato, di rappresentare l'algebra delle osservabili \mathcal{A} negli operatori limitati $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ su uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_ω . Una simile realizzazione non ha, in generale, alcun motivo di essere fedele, e il teorema di Gelfand-Naimark risolve tale problema fornendo una caratterizzazione delle realizzazioni fedeli di \mathcal{A} , asserendo che una C^* -algebra è isomorfa a un'algebra di operatori continui in uno spazio di Hilbert.

Teorema 2 (Gelfand-Naimark). *Una qualunque C^* -algebra è $*$ -isomorfa all'algebra degli operatori limitati $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} .*

Dimostrazione. Sia \mathcal{F} una famiglia di stati su \mathcal{A} che la separano, e per ciascun $\omega \in \mathcal{F}$ sia $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Psi_\omega)$ il risultato della costruzione GNS su ω . Consideriamo $\mathcal{H} = \bigoplus_{\omega \in \mathcal{F}} \mathcal{H}_\omega$ e $\pi = \bigoplus_{\omega \in \mathcal{F}} \pi_\omega$, dove $[\pi(A)x]_\omega = \pi_\omega(A)x_\omega$. Ma allora $\|\pi(A)x\|^2 = \sum_\omega \|\pi_\omega(A)x_\omega\|^2 \leq \|A\|^2 \sum_\omega \|x_\omega\|^2 = \|A\|^2 \|x\|^2$ e $\pi(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dato qualunque $A \in \mathcal{A}$. Inoltre, dal momento che gli stati in \mathcal{F} separano le osservabili, se $0 \neq A \in \mathcal{A}$ esiste almeno un $\omega \in \mathcal{F}$ in modo che $\pi_\omega(A) \neq 0$ e quindi, per costruzione,

$\ker \pi = \{0\}$. Pertanto π è uno $*$ -isomorfismo dell'algebra \mathcal{A} delle osservabili nell'algebra degli operatori limitati $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} . \square

La difficoltà, ora, risiede nel fatto che non si può applicare l'approccio algebrico alla definizione della particella quantistica per mezzo delle osservabili p e q , soddisfacenti le regole di commutazione di Heisenberg $[q_i, p_j] = i\delta_{ij}$ (dove abbiamo posto, per semplicità, $\hbar = 1$). Infatti q e p non possono esse osservabili in una C^* -algebra \mathcal{A} , dal momento che non è possibile definirne una norma. Infatti $[p, q^n] = -inq^{n-1}$, da cui $n\|q^{n-1}\| \leq 2\|p\|\|q\|\|q^{n-1}\|$, e, dato che $\|q^{n-1}\| \neq 0$, $\|p\|\|q\| \geq n/2$, qualunque sia $n \in \mathbb{N}$. Pertanto l'algebra di Heisenberg, ovvero l'algebra polinomiale generata da p e q con le regole di commutazione canoniche, non è quella appropriata alla descrizione della particella quantistica. La soluzione di questo problema è fornita allora dall'*algebra di Weyl*, ossia l'algebra polinomiale generata dalle funzioni limitate di p e q $U(\alpha) = \exp(i\alpha q)$ e $V(\beta) = \exp(i\beta p)$, dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^d$. Gli operatori di Weyl soddisfano le regole di commutazione $U(\alpha)V(\beta) = V(\beta)U(\alpha)\exp(-i\alpha\beta)$, $U(\alpha)U(\beta) = U(\alpha + \beta)$ e $V(\alpha)V(\beta) = V(\alpha + \beta)$ e l'algebra \mathcal{A}_W da essi generata è dotata di un'operazione $*$ naturale, in virtù del fatto che p e q debbano essere autoaggiunti: $U^*(\alpha) = U(-\alpha)$ e $V^*(\beta) = V(-\beta)$. Definendo allora una norma C^* su \mathcal{A}_W e prendendone la chiusura in norma si può fare di \mathcal{A}_W una C^* -algebra, detta C^* -algebra di Weyl. Notiamo allora che la connessione tra l'algebra di Lie di Heisenberg e l'algebra di Weyl è fornita dalla mappa esponenziale, che permette di associare ad un'algebra di Lie un gruppo di Lie, che in questo modo è chiamato *gruppo di Lie di Heisenberg*. Ma allora la descrizione matematica degli stati della particella quantistica è fornita dallo studio delle rappresentazioni della C^* -algebra di Weyl, e tale compito è notevolmente semplificato dal teorema di von Neumann, che dimostra come una rappresentazione regolare irriducibile di \mathcal{A}_W sia unica, a meno di trasformazioni unitarie. Con *rappresentazione regolare* di \mathcal{A}_W in uno spazio di Hilbert intendiamo una rappresentazione π tale per cui $\pi[U(\alpha)]$ e $\pi[V(\beta)]$ siano gruppi ad un parametro di operatori unitari continui rispettiva-

mente in α e β , secondo la topologia forte. Tale continuità in norma è in realtà equivalente alla continuità secondo la topologia debole, dal momento che, se U è unitario, $\|(U(t) - 1)\Psi\|^2 = 2\|\Psi\|^2 - \Re(\Psi, U(t)\Psi)$, che a sua volta è equivalente alla misurabilità (secondo Lebesgue) degli elementi di matrice $(\Phi, U(t)\Psi)$.

Teorema 3 (von Neumann). *Tutte le rappresentazioni regolari irriducibili della C^* -algebra di Weyl sono unitariamente equivalenti.*

Dimostrazione. Consideriamo $W(\alpha, \beta) = \exp[-i(\alpha\beta)/2] V(\beta)U(\alpha)$, in modo che $W^*(\alpha, \beta) = W(-\alpha, -\beta)$ e $W^*(\alpha, \beta)W(\alpha, \beta) = \mathbb{1}$. Costruiamo P nella maniera seguente

$$P = P^* = \frac{1}{2\pi} \int d\alpha d\beta \exp\left[-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{4}\right] \pi(W(\alpha, \beta)) \quad (2.37)$$

e l'esistenza di P è assicurata dalla regolarità di π e dalla limitatezza di $\pi(W(\alpha, \beta))$. P è inoltre non nullo, altrimenti si avrebbe $\pi(W) = 0$, e $P\pi(W(\alpha, \beta))P = \exp[-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/4]P$, sicché, prendendo $\alpha = \beta = 0$ si trova $P^2 = P$. Quindi P è un proiettore non nullo, ed esiste Ψ_0 in modo che $P\Psi_0 = \Psi_0$ e $\|\Psi_0\|^2 = 1$. Allora possiamo valutare il valor medio di $\pi(W(\alpha, \beta))$ su Ψ_0 .

$$\begin{aligned} (\Psi_0, \pi(W(\alpha, \beta))\Psi_0) &= (P\Psi_0, \pi(W(\alpha, \beta))P\Psi_0) \\ &= (\Psi_0, PW(\alpha, \beta)P\Psi_0) \\ &= \exp[-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/4] \end{aligned} \quad (2.38)$$

Dal momento che π è una rappresentazione irriducibile, P è unidimensionale. Infatti, se si potesse trovare un ulteriore vettore Φ ortogonale a Ψ in modo che $P\Phi = \Phi$ e $\|\Phi\|^2 = 1$ si avrebbe $(\Phi, \pi(W(\alpha, \beta))\Psi) = 0$. Questo, d'altra parte, implica che $(\Phi, \pi(A)\Psi) = 0$ dato un qualunque $A \in \mathcal{A}_W$, e dal momento ogni vettore è ciclico sotto una rappresentazione irriducibile si trova $\Phi = 0$. La rappresentazione così ottenuta è detta *rappresentazione di Fock*, e il vettore Ψ_0 è detto *stato di Fock*. Tale rappresentazione è unitariamente equivalente alla rappresentazione GNS dello stato ω_F data da $\omega_F(W(\alpha, \beta)) = \exp[-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/4]$. \square

2.4.2 Passaggio alla QFT

Quando si effettua il passaggio dalla meccanica quantistica alle teorie quantistiche di campo, una delle difficoltà che si incontrano, oltre alla già citata impossibilità in generale di trovare un vuoto privilegiato nel caso di spazi curvi e la difficoltà nella definizione dell'energia, è dovuta all'usuale approccio perturbativo. È noto, infatti, come la serie perturbativa di Dyson per la matrice di diffusione S diverga, e questo pone delle serie difficoltà sull'effettiva utilizzabilità dei risultati ottenuti in tale ambito. Infatti, se l'hamiltoniana di un sistema può essere scritta nella forma $H = H_0 + \lambda H_I$, dove H_0 indica l'hamiltoniana di un sistema non interagente e H_I contiene le interazioni, nella *rappresentazione di interazione*, in cui $\Psi_I(t) = V(t)\Psi_S(0)$, dove $\Psi(t)$ indica lo stato in rappresentazione di Schrödinger e $V(t) = \exp[iH_0 t] \exp[-iH t] = U_0^\dagger(t)U(t)$, l'evoluzione degli stati è fornita da $i\partial_t V(t, t') = H_I(t)V(t, t')$, dove $V(t, t') = V(t)V^{-1}(t') = U_0^\dagger(t)U(t)U^\dagger(t')U_0(t')$ e $H_I(t) = U_0^\dagger(t)\lambda H_I U_0(t)$. Evidentemente, $V(t, t')$ è la soluzione dell'equazione integrale (2.39)

$$V(t, t') = \mathbb{1} - i \int_{t'}^t H_I(s)V(s, t') ds \quad (2.39)$$

e V fornisce indicazioni circa la matrice di scattering S . Infatti gli operatori di Møller Ω^\pm sono forniti dai limiti (2.40)

$$\Omega^\pm = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} V^{-1}(t) \quad (2.40)$$

e la matrice di scattering è

$$S = \Omega^{-\dagger}\Omega^+ = \lim_{t \rightarrow \infty, t' \rightarrow -\infty} V(t, t') \quad (2.41)$$

Infine, se si prende l'interazione come adiabatica nel tempo $H_I^{(\varepsilon)}(t) = \exp[-\varepsilon|t|]H_I(t)$ è possibile espandere $V^{(\varepsilon)}(t, t_0)$ in serie di potenze della costante d'accoppiamento

λ , come in (2.42).

$$V^{(\varepsilon)}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_1} dt_n e^{-\varepsilon(|t_1| + \dots + |t_n|)} T[H_I(t_1) \dots H_I(t_n)] \quad (2.42)$$

La serie (2.42) corrisponde alla serie di Neumann-Liouville per l'operatore integrale in (2.39), e converge se $H_I(t)$ è un operatore limitato. Grazie all'assunzione di interazione adiabatica assicura che (2.42) è ben definita termine per termine se $t \rightarrow \infty$ e $t_0 \rightarrow -\infty$. Allora la matrice S può essere espressa come in (2.43).

$$S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n e^{-\varepsilon(|t_1| + \dots + |t_n|)} T[H_I(t_1) \dots H_I(t_n)] \quad (2.43)$$

Tipicamente, poi, l'interazione può essere espressa come l'integrale sulle coordinate spaziali di una densità d'hamiltoniana $h_I(x)$ e le integrazioni sulle coordinate temporali in (2.43) possono essere sostituite con integrazioni su tutto lo spaziotempo. Tuttavia questa scelta non è una buona definizione dell'hamiltoniana, e risulta necessario adottare un'interazione adiabatica moltiplicando $h_I(x)$ per un'opportuna funzione $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ in modo che $0 \leq g(x) \leq 1$ e $g(x) = 1$ se $x \in K \subset \mathbb{R}^4$, e infine prendere il limite $K \rightarrow \mathbb{R}^4$. L'esistenza di tale limite non è tuttavia assicurata e rende spesso necessario modificare l'hamiltoniana $h_I(x)$ introducendo i cosiddetti *controtermini*. Tuttavia, nonostante le procedure di rinormalizzazione permettano di rendere finiti i termini della serie di Dyson, non è disponibile una procedura di rinormalizzazione della serie medesima. Di conseguenza, qualora essa sia divergente, non avremo alcun modo di calcolare o definire la presunta quantità fisica rappresentata tramite il metodo perturbativo. In effetti, la divergenza della serie perturbativa è dimostrabile esattamente per alcuni semplici modelli, e un argomento per la sua divergenza nell'ambito dell'elettrodinamica quantistica è dovuto a Dyson stesso [23], nonostante in precedenza avesse sostenuto una verosimile convergenza della serie in rappresentazione d'interazione [22]. Se infatti, come sostiene Feynman [25], la QED è equivalente ad una teoria di particelle che interagiscono

l'una con l'altra tramite un'azione a distanza, questa può essere espressa nella forma $e^2\delta_+(s_{12}^2)$, dove $s_{12}^2 = t_{12}^2 - r_{12}^2$ e $\delta_+(s_{12}^2) = (2r)^{-1}[\delta_+(t-r) + \delta_+(-t-r)]$, con $\delta_+(x)$ definito come in (2.44).

$$\delta_+(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{(i\pi)^{-1}}{x - i\epsilon} = -\frac{i}{\pi} \mathbf{P} \frac{1}{x} + \delta(x) \quad (2.44)$$

Allora se $F(e^2)$ è la quantità fisica che vogliamo calcolare, consideriamone l'espansione formale in potenze di e^2 , $F(e^2) = a_0 + a_2e^2 + a_4e^4 + \dots$, e supponiamo che tale serie converga per qualche valore positivo della costante d'accoppiamento e^2 . La convergenza della serie (a termini rinormalizzati, eventualmente) implica l'analiticità di $F(e^2)$ in un intorno di $e^2 = 0$, e pertanto la serie medesima converge anche per valori sufficientemente piccoli, ma negativi, di e^2 . In questo caso l'interazione diviene $-|e^2|\delta_+(s_{12}^2)$ e può essere interpretata come l'interazione di cariche in un mondo fittizio in cui cariche di segno uguale si attraggono, mentre cariche di segno opposto si respingono. È chiaro allora che, nel limite in cui il potenziale Coulombiano (con segno opposto a quello usuale) sia accettabile, non sia possibile trovare uno stato fondamentale per il sistema che sia uno stato di minima energia, dal momento che è possibile sia in modulo maggiore dell'energia cinetica totale. Questa situazione può essere ottenuta, per esempio, creando un gran numero di coppie e^+e^- e portando gli elettroni in una regione di spazio e i positroni in un'altra regione differente. Ovviamente se lo stato iniziale è noto, ed è uno stato in cui solamente poche particelle siano presenti, sarà necessario superare una barriera di potenziale pari almeno all'energia necessaria alla creazione delle coppie per portare il sistema nello stato patologico appena descritto. Tuttavia, grazie all'effetto tunnel, la probabilità che in un intervallo di tempo finito il sistema si trovi in nella situazione patologia è sempre finita, e questo implica l'instabilità di qualunque sistema fisico nei confronti della polarizzazione spontanea del vuoto. Secondo Dyson risulta allora impossibile che tramite l'integrazione delle equazioni del moto si possano ottenere funzioni analitiche e ben definite. Così $F(-|e^2|)$ non può essere

analitica, e la serie in potenze di $|e^2|$ non può essere convergente.

A tutte queste considerazioni dovremo inoltre aggiungere la non applicabilità del teorema 3 di von Neumann. Per mostrare la non validità del teorema nel caso di un numero infinito di gradi di libertà dovremo allora generalizzare la procedura che ci ha portato a definire l'algebra di Weyl, \mathcal{A}_W . Chiameremo allora \mathcal{E} uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare non negativo $\mathcal{E} \ni f, g \rightarrow (f, g)$, e $\mathcal{E}^{(C)}$ la sua complessificazione. Non è necessario richiedere che \mathcal{E} sia completo rispetto alla topologia in norma indotta dal prodotto scalare. Introduciamo ora le funzioni $U(f)$ e $V(f)$, soddisfacenti le regole di commutazione (2.45)

$$\begin{cases} U(f)U(g) = U(f+g) \\ V(f)V(g) = V(f+g) \\ U(f)V(g) = \exp[i(f, g)]V(g)U(f) \end{cases} \quad (2.45)$$

in modo che $U(f)$ e $V(f)$ siano continui ciascuno rispetto al proprio argomento, fintanto che f varia in un sottospazio di dimensione finita di \mathcal{E} . Evidentemente, se $\dim \mathcal{E} < +\infty$ ritroviamo il caso dell'algebra di Weyl già discusso, se invece abbiamo $\dim \mathcal{E} = \infty$ stiamo trattando la QFT. Se poi, $\dim \mathcal{E} = \infty$, un vettore $f \in \mathcal{E}$ svolge il ruolo di test-funzione su cui agiscono gli operatori di campo, intesi come distribuzioni a valori operatoriali. Per i nostri scopi risulta opportuno lavorare nella complessificazione $\mathcal{E}^{(C)}$ di \mathcal{E} , i cui elementi $F \in \mathcal{E}^{(C)}$ saranno della forma $F = f + ig$, $f, g \in \mathcal{E}$. Introdotto allora $W(F)$ come segue

$$W(F) = \exp[i(f, g)]V(\sqrt{2}f)U(\sqrt{2}g) \quad (2.46)$$

troveremo che $W^*(F) = W(-F)$ e che le regole di commutazione (2.45) divengono (2.47).

$$W(F_1)W(F_2) = \exp[-i\Im(F_1, F_2)]W(F_1 + F_2) \quad (2.47)$$

Le funzioni $U(f)$ e $V(f)$, o l'equivalente $W(F)$, definiscono quella che chiameremo

nuovamente algebra di Weyl. Se invece $U(f)$ e $V(g)$ sottintendono il risultato di una rappresentazione dell'algebra di Weyl su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , definiranno un *sistema di Weyl*, ovvero una *rappresentazione delle CCR*. Supponiamo allora di lavorare con una particolare rappresentazione delle CCR, data tramite $W(F)$, e definiamo il funzionale caratteristico $E(F) = (\Phi, W(F)\Phi)$, dove Φ indica un qualunque vettore di norma unitaria in \mathcal{H} . Tale funzionale caratteristico risulta normalizzato $E(0) = 1$, continuo in F , se F appartiene ad un sottospazio di dimensione finita di $\mathcal{E}^{(C)}$, e positivo, ovvero soddisfa (2.48).

$$\sum_{j,k=1}^n \lambda_j \bar{\lambda}_k E(F_j - F_k) \exp[-i\Im(F_j, F_k)] \geq 0, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, \forall F_i \in \mathcal{E}^{(C)} \quad (2.48)$$

Si dimostra ora che ciascun funzionale caratteristico $E(F)$ è definito in maniera univoca, a meno di trasformazioni unitarie, da una rappresentazione unitaria $W(F) = W_E(F)$ delle CCR, con vettore ciclico Φ . Infatti, se $\mathcal{F}(\mathcal{E}^{(C)})$ indica l'insieme delle funzioni $R(F)$, non nulle unicamente su un sottoinsieme finito di $F \in \mathcal{E}^{(C)}$, su $\mathcal{F}(\mathcal{E}^{(C)})$ si può definire un'involuzione $R^*(F) = R(-F)$ e un prodotto $R_1 R_2$

$$R_1 R_2(F) = \sum_{F' \in \mathcal{E}^{(C)}} R_1(F') R_2(F - F') \exp[-i\Im(F', F)] \quad (2.49)$$

in modo che $\mathcal{F}(\mathcal{E}^{(C)})$ sia una $*$ -algebra con identità e $\omega(R) = \sum_F R(F) E(F)$ definisce un funzionale positivo e lineare su $\mathcal{F}(\mathcal{E}^{(C)})$. Allora la costruzione GNS ci fornisce una rappresentazione π in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} con vettore ciclico Φ , in modo che $\omega(R) = (\Phi, \pi(R)\Phi)$. Allora, se $W(F) = \pi(R_F)$ è definito da R_F nullo ovunque effetto che in F , dove $R_F(F) = 1$, si verifica che $W(F)$ definisce $E(F)$ correttamente, e π è unica a meno di trasformazioni unitarie. Ma allora il funzionale $E_0(F) = \exp[-\|F\|^2/2]$, che si verifica essere un funzionale caratteristico ammissibile, definisce una rappresentazione $W_0(F)$ delle CCR, che risulta essere equivalente alla rappresentazione di Fock ed è irriducibile. Dato $W_0(F)$ possiamo infine costruire nuove rappresentazioni irriducibili delle CCR, definendo, per

esempio, dato $\rho \in \mathbb{C}$

$$W_\rho(F) = W_\rho(f + ig) = W_0(\rho f + ig/\rho) \quad (2.50)$$

e, se $\dim \mathcal{E}^{(C)} = \infty$, due rappresentazioni $W_{\rho_1}(F)$ e $W_{\rho_2}(F)$ risultano unitariamente inequivalenti se $\rho_1 \neq \rho_2$.

Se a tutto questo aggiungiamo anche le conseguenze del teorema di Haag, che, per esempio, implica l'impossibilità di definire la rappresentazione di interazione per una teoria di campi interagenti, la strada ideale da seguire sembra essere quella di impostare un approccio assiomatico, con lo scopo di determinare solo in seguito la rappresentazione appropriata.

2.4.3 Approccio algebrico e assiomi di Wightman

Come nel caso della meccanica classica, l'approccio algebrico postula la struttura dell'algebra delle osservabili e dello spazio degli stati.

Assioma 1 (Osservabili e stati). *È data una C^* -algebra \mathcal{A} , i cui elementi hermitiani $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}$ sono identificati con le osservabili di un sistema. Gli stati $S(\mathcal{A})$ di tale sistema sono identificati con i funzionali lineari positivi su \mathcal{A} .*

Lo spazio degli stati $S(\mathcal{A})$ è un insieme convesso, sicché possiamo definire gli stati puri $PS(\mathcal{A})$ come l'insieme degli stati $\omega \in S(\mathcal{A})$ che non possono essere scritti nella forma $\omega = \lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\omega_2$. Inoltre la definizione di $S(\mathcal{A})$ è troppo debole, e lo spazio degli stati potrebbe, per esempio, non essere separabile anche nel caso in cui \mathcal{A} lo sia. Pertanto si può scegliere di utilizzare, al posto di $S(\mathcal{A})$ un suo sottoinsieme $\mathfrak{G} \subset \mathcal{A}$, che identifichiamo con lo spazio degli stati fisici del sistema in esame, che risulta caratterizzato tramite la coppia $(\mathcal{A}, \mathfrak{G})$. Si può richiedere, per esempio, che \mathfrak{G} sia convesso, per ovvie ragioni fisiche, e che gli stati di \mathfrak{G} distinguano gli elementi positivi dell'algebra, ovvero $\omega(A) > 0 \Rightarrow \exists B \in \mathcal{A} : A = B^*B$, dato $\omega \in \mathfrak{G}$ qualunque e $A \in \mathcal{A}$. Un risultato dovuto a Kadison [40] ci assicura allora

che \mathfrak{G} sia un sottoinsieme denso di $S(\mathcal{A})$ e che i suoi elementi separino l'algebra, ovvero, dati $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ in modo che $\omega(A_1) = \omega(A_2)$, qualunque sia $\omega \in \mathfrak{G}$, questo implica $A_1 = A_2$.

In questo formalismo possiamo definire la probabilità di transizione tra due stati puri $\omega_1, \omega_2 \in PS(\mathcal{A})$ tramite

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = 1 - \frac{1}{4} \|\omega_1 - \omega_2\|^2 \quad (2.51)$$

in modo che due stati ω_1 e ω_2 siano detti ortogonali se $\omega_1 \cdot \omega_2 = 0$. Allo stesso modo due sottoinsiemi $S_1, S_2 \subset PS(\mathcal{A})$ saranno detti ortogonali se i loro stati risultano mutuamente ortogonali. Se un insieme S non può essere scritto come unione di due sottoinsiemi $S_1, S_2 \subset S \subset PS(\mathcal{A})$, S sarà detto *indecomponibile* e un insieme indecomponibile massimale sarà detto essere un *settore* di $PS(\mathcal{A})$. Risulta che la relazione \sim , tale per cui $\omega_1 \sim \omega_2$ se ω_1 e ω_2 appartengono al medesimo insieme indecomponibile, è una relazione di equivalenza su $PS(\mathcal{A})$, e l'insieme degli stati puri può essere univocamente partizionato in settori, identificabili con le classi di equivalenza di $PS(\mathcal{A})$.

Inoltre, se π è una rappresentazione di \mathcal{A} su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , tale rappresentazione definisce una classe di stati associati alla rappresentazione medesima. Dato infatti un qualunque vettore $\Psi \in \mathcal{H}$ si può verificare che lo stato ω_Ψ definito tramite (2.52) sia uno stato ben definito.

$$\omega_\Psi(A) = \frac{(\Psi, \pi(A)\Psi)}{(\Psi, \Psi)} \quad (2.52)$$

Convenzionalmente si dice una rappresentazione $\tilde{\pi}$ essere un *multiplo* di un'altra rappresentazione π se si può scrivere $\tilde{\pi} = \pi \oplus \dots \oplus \pi$, e se, in più, π è irriducibile, $\tilde{\pi}$ è detta *fattoriale di tipo I*. Se due rappresentazioni, fattoriali di tipo I, $\tilde{\pi}_1$ e $\tilde{\pi}_2$ sono multipli di rappresentazioni π_1 e π_2 unitariamente inequivalenti, $\tilde{\pi}_1$ e $\tilde{\pi}_2$ sono dette *disgiunte*. Allora le rappresentazioni irriducibili risultano essere un buon modo per

organizzare gli stati di un sistema, dal momento che vale il teorema 4.

Teorema 4. *Tutti gli stati puri $PS(\mathcal{A})$ risultano essere associati a tutte le rappresentazioni irriducibili di \mathcal{A} . Ogni settore di $PS(\mathcal{A})$ è inoltre associato ad una rappresentazione irriducibile di \mathcal{A} , e rappresentazioni unitariamente equivalenti (inequivalenti) definiscono lo stesso settore (settori ortogonali) di $PS(\mathcal{A})$. Infine, se due rappresentazioni $\tilde{\pi}_1$ e $\tilde{\pi}_2$, fattoriali di tipo I, sono disgiunte, allora $S_{\tilde{\pi}_1} \cap S_{\tilde{\pi}_2} = \emptyset$.*

Tutte queste considerazioni giustificano allora l'introduzione dell'assioma seguente, che caratterizza gli stati fisici di un sistema.

Assioma 2 (Stati fisici). *Gli stati fisici \mathfrak{G} di un sistema sono tutti quelli associati ad una rappresentazione π_{phys} dell'algebra delle osservabili su uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_{phys} , detto lo spazio di Hilbert fisico del sistema.*

Un elemento importante da introdurre nell'approccio algebrico alle teorie quantistiche è, dunque, quello di simmetria. Nell'ambito allora dell'algebra delle osservabili \mathcal{A} e dello spazio degli stati $S(\mathcal{A})$ si possono introdurre due biiezioni $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ e $\alpha' : S(\mathcal{A}) \rightarrow S(\mathcal{A})$, che definiscono una simmetria di un sistema se soddisfano la condizione di compatibilità (2.53), che rende possibile caratterizzare completamente la simmetria in termini di una sola delle due biiezioni.

$$(\alpha'\omega)(\alpha A) = \omega(A), \quad \forall \omega \in S(\mathcal{A}), \forall A \in \mathcal{A} \quad (2.53)$$

L'insieme di tutte le simmetrie di un sistema forma un gruppo sotto la legge di moltiplicazione fornita dalla composizione delle biiezioni, come è immediato verificare,

e α' è anche un'isometria, dal momento che

$$\begin{aligned}
\|\alpha'\omega_1 - \alpha'\omega_2\| &= \sup_{A \in \mathcal{A}, \|A\| \leq 1} |(\alpha'\omega_1 - \alpha'\omega_2)(A)| \\
&= \sup_{A \in \mathcal{A}, \|A\| \leq 1} |(\omega_1 - \omega_2)(\alpha^{-1}A)| \\
&= \|\omega_1 - \omega_2\|
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Se, inoltre, si convenisse di definire le simmetrie unicamente per gli elementi hermitiani $\mathcal{A}_h \subseteq \mathcal{A}$ dell'algebra delle osservabili, si potrebbe sempre estenderne la definizione a tutti gli elementi di \mathcal{A} . Infatti, se $A \in \mathcal{A}$, $A = A_1 + iA_2$, dove $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_h$, e l'estensione della definizione è immediata. Allo stesso modo, se avessimo definito α' unicamente sugli stati fisici \mathfrak{S} , sarebbe stato possibile estendere la definizione all'intero $S(\mathcal{A})$, sfruttando il fatto che \mathfrak{S} è denso, secondo la topologia debole, in $S(\mathcal{A})$.

Qualora l'algebra delle osservabili sia rappresentata su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , una simmetria sarà detta indotta da un operatore unitario (antiunitario) U se $\alpha A = UAU^{-1}$ ($\alpha A = UA^*U^{-1}$), dato $A \in \pi(\mathcal{A})$ e $\alpha'\Psi = U\Psi$, con $\Psi \in \mathcal{H}$.

Un gruppo G , allora, sarà detto essere un *gruppo di simmetria* per il sistema $(\mathcal{A}, S(\mathcal{A}))$ se esiste un omomorfismo che mappa G nell'insieme di tutte le simmetrie di $(\mathcal{A}, S(\mathcal{A}))$. Solitamente, inoltre, qualora G sia un gruppo di Lie, si conviene di richiedere che la mappa $G \ni g \rightarrow \omega(\alpha_g A)$ sia continua in g . Così, uno stato $\omega \in S(\mathcal{A})$, o anche $\omega \in \mathfrak{S}$, sarà detto essere *G -invariante* se $\alpha'_g \omega = \omega$, dato qualunque $g \in G$. Infine, se G si caratterizzasse come un gruppo connesso, potremmo sempre considerarlo semplicemente connesso, dal momento che, altrimenti, potremmo passare al ricoprimento universale \tilde{G} di G , con la scelta $\beta_{\tilde{g}} = \alpha_{\phi(\tilde{g})}$, dove ϕ indica l'omomorfismo di ricoprimento. Con questa scelta si avrà ovviamente $\beta_{\tilde{g}} = \mathbb{1}$ se $\phi(\tilde{g}) = e \in G$. Tale scelta di passare al ricoprimento universale \tilde{G} risulta essere ammissibile anche perché, se \tilde{G} si caratterizzasse come gruppo di simmetria di un sistema, allora, prendendo come condizione $\beta_{\tilde{g}} = \mathbb{1}$ se $\phi(\tilde{g}) = e \in G$, anche

G sarebbe un gruppo di simmetria per il medesimo sistema. Nel nostro caso siamo, in effetti, interessati al caso in cui un gruppo di simmetria G sia realizzato unitariamente (antiunitariamente) sullo spazio di Hilbert fisico \mathcal{H} , nel senso che esiste una mappa continua $g \rightarrow U_g$, tale per cui $A \rightarrow UAU^{-1}$ ($A \rightarrow UA^*U^{-1}$). Dal momento che, nel seguito, la nozione di un vettore ciclico ed invariante sarà largamente utilizzata nel contesto degli operatori di campo, enunciamo il risultato della proposizione 7, che ci mostra come un gruppo di simmetria G , sotto opportune condizioni, sia realizzato tramite operatori unitari su \mathcal{H} .

Proposizione 7. *Sia G un gruppo di simmetria della C^* -algebra \mathcal{A} degli operatori sullo spazio di Hilbert fisico \mathcal{H} . Sia inoltre $\Psi_0 \in \mathcal{H}$ un vettore G -invariante ciclico per \mathcal{A} . Allora il gruppo G è realizzato tramite una rappresentazione unitaria (antiunitaria) e continua (nella topologia forte, o nella topologia debole) $g \rightarrow U_g$ su \mathcal{H} , con la proprietà che $U_g\Psi_0 = \Psi_0$, dato qualunque $g \in G$.*

Avendo definito il concetto di simmetria dovremo incorporare nella teoria l'idea fondamentale che in una teoria quantistica relativistica il gruppo di simmetria sia il gruppo di Poincaré, definito come il gruppo delle trasformazioni affini $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ che preservano il prodotto scalare di Minkowski. Identificheremo pertanto ciascuna trasformazione del gruppo di Poincaré con la coppia (a, Λ) , dove $a \in \mathbb{M}$ e Λ è una trasformazione di Lorentz. Come il gruppo di Lorentz, il gruppo di Poincaré è composto di quattro componenti connesse, delle quali la componente connessa con l'identità, \mathfrak{P}_+^\uparrow , analoga a L_+^\uparrow , è un sottogruppo. La legge di composizione in \mathfrak{P} sarà fornita da $(a_1, \Lambda_1)(a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2)$ e questo, assieme al fatto che \mathfrak{P} contiene come sottogruppi il gruppo delle traslazioni \mathbb{M} e il gruppo di Lorentz L , caratterizza \mathfrak{P} come il prodotto semidiretto $\mathfrak{P} \simeq \mathbb{M} \rtimes L$. Inoltre notiamo che, come nel caso di L_+^\uparrow , \mathfrak{P}_+^\uparrow è connesso ma non semplicemente connesso, e pertanto passeremo al ricoprimento universale \mathfrak{P}_0 di \mathfrak{P}_+^\uparrow . In questo modo, la richiesta che \mathfrak{P}_+^\uparrow sia il gruppo di simmetria del sistema fisico $(\mathcal{A}, \mathfrak{G})$ si traduce nell'assioma seguente.

Assioma 3 (Invarianza relativistica). *Nello spazio di Hilbert fisico \mathcal{H} è data una rappresentazione unitaria $(a, \underline{\Lambda}) \rightarrow U(a, \underline{\Lambda})$ di \mathfrak{P}_0 , continua nella topologia debole, e tale per cui, dati $A \in \mathcal{A}$ e $\Psi \in \mathcal{H}$, si abbia $A \rightarrow \alpha_{(a, \underline{\Lambda})} A = U(a, \underline{\Lambda}) A U^{-1}(a, \underline{\Lambda})$ e $\Psi \rightarrow \alpha'_{(a, \underline{\Lambda})} \Psi = U(a, \underline{\Lambda}) \Psi$.*

Proseguendo, ricordiamo che possiamo anche identificare un elemento del gruppo di Poincaré (a, Λ) con $(a, \ell_{\mu\nu} \theta^{\mu\nu} / 2)$, dove $\theta_{\mu\nu}$ è antisimmetrica. Questo ci permette di studiare l'algebra di Lie di \mathfrak{P} nell'ambito di una particolare rappresentazione del gruppo stesso. Sia allora $g \rightarrow T_g$ una rappresentazione di \mathfrak{P} sullo spazio delle test-funzioni $\mathcal{S}(\mathbb{M})$ in modo che $(T_{(a, \Lambda)} f)(x) = f(\Lambda^{-1}(x - a))$. Allora, espandendo nell'intorno dell'identità, troviamo

$$T_{(a, \Lambda)} - \mathbb{1} = iP^\mu a_\mu + \frac{i}{2} M^{\rho\sigma} \theta_{\rho\sigma} + \text{termini di ordine superiore} \quad (2.55)$$

dove $M^{\rho\sigma}$ è antisimmetrica: $M^{\rho\sigma} = -M^{\sigma\rho}$. Le quantità P^μ e $M^{\rho\sigma}$ sono identificate, rispettivamente, con il momento totale e con il momento angolare relativistico. Tramite i generatori del gruppo di Poincaré possiamo formare unicamente due Casimir, uno dei quali è P^2 , mentre l'altro si identifica con W^2 , dove $W_\lambda = \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} P^\mu W^{\nu\rho} / 2$ è il vettore di Pauli-Lubanski. Le rappresentazioni irriducibili di \mathfrak{P}_0 possono allora essere classificate per mezzo del valore dei due Casimir che risultano essere proporzionali all'identità. Tuttavia, se $P^2 \geq 0$ un'altra quantità invariante è il segno $\epsilon(P^0)$ della componente temporale di P . Prendendo, per convenzione, $\epsilon(P^0) = 0$ se $P^2 < 0$, possiamo classificare le rappresentazioni irriducibili di \mathfrak{P}_0 come segue.

1. $P^2 \geq 0$, $\epsilon(P^0) = +1$: particelle reali di massa $m^2 = P^2$
2. $P^2 \geq 0$, $\epsilon(P^0) = -1$: rappresentazione coniugata alla precedente
3. $P^2 = 0$, $P \neq 0$, $\epsilon(P^0) = +1$: particelle reale di massa nulla
4. $P^2 = 0$, $P \neq 0$, $\epsilon(P^0) = -1$: rappresentazione coniugata alla precedente

5. $P = 0$: tutte rappresentazioni sono infinito-dimensionali eccetto quella in cui

$$U(a, \Lambda) = \mathbb{1}.$$

6. $P^2 < 0$: non hanno interpretazione fisica⁵

La necessità di escludere alcune delle possibilità elencate ci conduce allora alla formulazione della condizione spettrale, in modo che le uniche rappresentazioni ammissibili appartengano alle classi (1), (3) e (5), o, più specificamente, che le rappresentazioni di \mathfrak{P}_0 possono essere decomposte in rappresentazioni irriducibili delle classi già elencate. Notiamo che tutti gli stati con P definito da (5) sono invarianti per traslazioni, mentre quelli per cui $U(a, \Lambda) = \mathbb{1}$ sono invarianti sotto tutte le trasformazioni di Poincaré. Tra tutte le rappresentazioni irriducibili della classe (5), in effetti, si considera unicamente l'identità, $U(a, \Lambda) = \mathbb{1}$. Notiamo, infine, che una scrittura alternativa per la condizione spettrale è la seguente

$$\text{supp} \int (\Phi, U(a, \mathbb{1})\Psi) \exp(-iap) da \subset \bar{V}^+ \quad (2.56)$$

per qualunque $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}$.

Assioma 4 (Condizione spettrale). *Lo spettro dell'operatore quadrimomento totale P deve essere interamente contenuto nel cono chiuso futuro \bar{V}^+ .*

Da ultimo, dovremo definire la classe dei campi. Dobbiamo notare, allora, come sia naturale l'introduzione delle osservabili di un sistema di campi come funzionali di una certa famiglia di *campi fondamentali*, che soddisfano determinate equazioni. Tuttavia il concetto di campo in un determinato punto di \mathbb{M} non è necessariamente dotato di significato, e per questo motivo sarà necessario introdurre la nozione di località.⁶ Invece, è possibile associare ad una determinata regione \mathcal{O} dello spazio-tempo \mathbb{M} un'algebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ generata, in un senso che specificheremo, dai possibili

⁵È opportuno mettere in evidenza come paia possibile, in determinate circostanze, fornire un'interpretazione di particelle tachioniche a questa classe di rappresentazioni di \mathfrak{P}_0 .

⁶Notiamo che l'introduzione dei campi fondamentali è necessaria per uno studio completo della dinamica. Tali campi serviranno allora per costruire le quantità osservabili, nonostante essi stessi non debbano appartenere necessariamente all'algebra delle osservabili. Una simile nozione non è una caratteristica peculiare della QFT, ma si può ritrovare anche in teorie di campo classiche. Se

polinomi nei campi. In questo senso interpreteremo $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ con operazioni eseguibili fisicamente nella regione $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{M}$, e questo suggerisce che le “algebre locali” $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ possano determinare la caratterizzazione matematica intrinseca della teoria. Tutto ciò ci conduce alla formulazione dell’assioma di località, [32][33][34].

Assioma 5 (Località). *Per ogni sottoinsieme aperto \mathcal{O} di \mathbb{M} esiste una C^* -algebra con unità $\mathcal{A}(\mathcal{O})$, che sia una sottoalgebra di \mathcal{A} , detta algebra delle osservabili locali su \mathcal{O} . Definendo l’algebra delle osservabili quasi locali \mathcal{A}_{loc} tramite $\mathcal{A}_{loc} = \bigcup_{\mathcal{O} \subset \mathbb{M}} \mathcal{A}(\mathcal{O})$ risulta che \mathcal{A} sia il completamento in norma di \mathcal{A}_{loc} , $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}_{loc}}$. Richiediamo inoltre che valgano le seguenti condizioni*

1. $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$
2. $\alpha_{(a, \Lambda)} \mathcal{A}(\mathcal{O}) = \mathcal{A}(\Lambda(\Lambda)\mathcal{O} + a)$
3. Se \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 sono separati da un intervallo spaziale, allora $[\mathcal{A}(\mathcal{O}_1), \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)] = 0$

Gli assiomi precedenti caratterizzano completamente una teoria quantistica nell’approccio algebrico, e sono completamente generali. L’approccio di Wightman, invece, è caratterizzato da un’applicabilità meno vasta ma, in virtù dell’assetto analitico sottostante, più immediata e semplice. In particolare, gli assiomi di Wightman, che, in una certa misura, possono essere derivati o giustificati a partire da quelli algebrici, si occupano di fornire una trattazione matematicamente coerente dei campi fisici, intesi come i campi che possono essere associati a operatori in un particolare spazio di Hilbert \mathcal{H} . La C^* -algebra generata dalle funzioni limitate dei campi fisici è detta l’*algebra delle quantità fisiche*. In questo contesto, allora, non sono inclusi tutti i campi fisici che si caratterizzano come non osservabili. Tra questi un esempio importante è fornito dai campi di gauge, che, quindi, non possono essere inclusi in una teoria di campi rigorosamente di Wightman.

pensiamo, per esempio, all’elettrodinamica classica, il potenziale A_μ si caratterizza certamente come un campo fondamentale, ma non è direttamente osservabile, perlomeno fintanto che il campo di studio sia classico e non quantistico. In quest’ultimo caso, l’effetto Aharonov-Bohm permetterebbe la misurazione della circuitazione di un particolare A_μ , che non risulta esprimibile in termini del tensore elettromagnetico $F_{\mu\nu}$, a causa delle proprietà topologiche dello spazio, che non è semplicemente connesso.

L'oggetto fondamentale di una teoria di Wightman, allora, è un sistema di campi, che viene inteso come una collezione, finita o infinita, di quantità $\phi^{(k)}$, a valori tensoriali o spinoriali, dotate di un numero finito di componenti di Lorentz.⁷ Ciascuna di tali componenti di Lorentz deve identificare una distribuzione a valori operatoriali su un determinato spazio di test-funzioni, $\mathcal{D}(\mathbb{M}^n)$ o $\mathcal{S}(\mathbb{M}^n)$, con la richiesta che, qualora un campo non sia hermitiano, esistano indici \bar{k} e \bar{l} tali per cui $[\phi_l^{(k)}]^* = \phi_{\bar{l}}^{(\bar{k})}$.

Gli assiomi della teoria algebrica sono tutti utilizzati, implicitamente o esplicitamente, nella teoria di Wightman, i cui assiomi sono riassunti nel seguito.

W1 È dato uno spazio di Hilbert \mathcal{H} con una rappresentazione unitaria $U(a, \underline{\Lambda})$ di \mathfrak{P}_0 , continua nella topologia debole.

W2 Lo spettro del momento totale P è contenuto in \overline{V}^+ .

W3 In \mathcal{H} è dato un unico vettore Ψ_0 , invariante per traslazioni $(a, \mathbb{1})$.

W4 I campi quantistici formano un insieme di quantità $\{\phi_l^{(k)}\}$ tensoriali o spinoriali, ciascuna con un numero finito di componenti di Lorentz. Ciascuna componente di Lorentz $\phi_l^{(k)}(x)$ è una distribuzione a valori operatoriali su $\mathcal{S}(\mathbb{M})$, in modo che $D \subset \mathcal{H}$, denso in \mathcal{H} , sia il dominio comune di tutti i campi $\phi_l^{(k)}(f)$, contenga Ψ_0 e sia invariante sotto l'azione dei campi stessi e di $U(a, \underline{\Lambda})$.

W5 I campi seguono la seguente legge di trasformazione sotto l'azione del gruppo di Poincaré \mathfrak{P}_0

$$U(a, \underline{\Lambda})\phi_l^{(k)}(x)U^{-1}(a, \underline{\Lambda}) = \sum_m V_{lm}^k(\underline{\Lambda}^{-1})\phi_m^{(k)}(\underline{\Lambda}(\underline{\Lambda}) + a) \quad (2.57)$$

⁷Rigorosamente parlando, nulla ci vieta di costruire una teoria di Wightman di campi con un numero infinito di componenti di Lorentz, tuttavia solitamente si esclude una simile possibilità in quanto condurrebbe alla perdita di alcuni dei risultati che altrimenti si potrebbero ottenere.

dove V^k indica una rappresentazione matriciale, reale o complessa, finito-dimensionale di $SL(2, \mathbb{C})$. Si richiede che $V^k(-\mathbb{1}) = \pm \mathbb{1}$, in modo da rappresentare particelle di spin intero, se $V^k(-\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, o semi-intero, se $V^k(-\mathbb{1}) = -\mathbb{1}$.

W6 $[\phi_l^{(k)}(x), \phi_{l'}^{(k')}(y)]_{\pm} = 0$, se $(x - y)^2 < 0$.

W7 L'insieme D_0 delle combinazioni lineari finite generate da elementi della forma

$$\phi_{l_1}^{(k_1)}(f_1) \cdots \phi_{l_n}^{(k_n)}(f_n) \Psi_0 \text{ è denso in } \mathcal{H}.$$

Mentre gli assiomi **W1-W3** sono completamente analoghi a quelli discussi per l'approccio algebrico, notiamo che il postulato **W4**, che definisce i campi di Wightman, pone delle ipotesi tecniche necessarie per un corretto trattamento di operatori non limitati. Infatti, il risultato dell'azione di un campo $\phi_l^{(k)}(x)$ su una test funzione $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{M})$, definito da

$$\phi_l^{(k)}(f) = \int \phi_l^{(k)}(x) f(x) dx \quad (2.58)$$

è solitamente un operatore non limitato. In ogni caso, nonostante i singoli operatori di campo siano non limitati è possibile ricostruire l'algebra delle osservabili locali a partire da essi e imponendo una richiesta ulteriore. Possiamo infatti richiedere che tutte le combinazioni lineari di operatori di campo che siano a loro volta operatori hermitiani siano anche essenzialmente autoaggiunti sul dominio comune D . In questo modo abbiamo la possibilità di costruire l'algebra $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ come l'algebra di von Neumann generata da tutte le funzioni limitate degli operatori di campo $\phi_l^{(k)}(f)$, purché $\text{supp } f(x) \subseteq \mathcal{O}$, e tramite queste definiamo $\mathcal{F} = \overline{\bigcup_{\mathcal{O} \in \mathbb{M}} \mathcal{F}(\mathcal{O})}$. Se, allora, abbiamo un gruppo di simmetrie di \mathcal{F} che lasci invariante ciascun $\mathcal{F}(\mathcal{O})$, e chiameremo tali trasformazioni *trasformazioni di gauge*, definiremo $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ come la sottoalgebra degli elementi invarianti di $\mathcal{F}(\mathcal{O})$.

Inoltre siamo in grado di costruire, in virtù delle ipotesi di **W4**, l'algebra polinomiale $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ per qualunque insieme aperto $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$ come l'algebra generata dalle

combinazioni lineari a coefficienti complessi di tutti gli operatori della forma

$$\int \phi_{l_1}^{(k_1)}(x_1) \cdots \phi_{l_n}^{(k_n)}(x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (2.59)$$

con la richiesta che $\text{supp } f(x_1, \dots, x_n) \subseteq \mathcal{O} \times \cdots \times \mathcal{O}$. L'algebra polinomiale $\mathcal{P}(\mathcal{O})$, in quanto chiusa sotto l'operazione di involuzione, è una $*$ -algebra.

Notiamo anche che l'assioma **W5** di covarianza non trova un corrispettivo nell'approccio algebrico, ma è dettato dalla richiesta che i campi si trasformino in una maniera definita e semplice sotto l'azione del gruppo di Poincaré \mathfrak{P}_0 .

Per quanto riguarda, invece, **W7**, che possiamo identificare come un postulato circa la ciclicità del vuoto, questo ammette una generalizzazione nella forma della proprietà di Reeh-Schlieder.

Proposizione 8 (Reeh-Schlieder). *Lo stato di vuoto Ψ_0 è ciclico sotto l'azione dell'algebra polinomiale $\mathcal{P}(\mathcal{O})$, qualunque sia $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$ aperto.*

Dimostrazione. Dimostriamo che l'unico vettore $\Phi \in \mathcal{H}$ ortogonale a $\mathcal{P}(\mathcal{O})\Psi_0$ è il vettore nullo $\Phi = 0$. La distribuzione

$$(\Phi, \phi_{l_1}^{(k_1)}(x_1) \cdots \phi_{l_n}^{(k_n)}(x_n) \Psi_0) \quad (2.60)$$

che esiste come distribuzione su $\mathcal{S}(\mathbb{M}^n)$ in virtù del teorema del nucleo di Schwartz, è il valore al bordo reale in senso distribuzionale di una funzione $f(z_1, \dots, z_n)$, olomorfa in $\mathbb{M}^n + iK$, dove K è un cono convesso non vuoto. Inoltre, le funzioni precedentemente definite sono nulle in un sottoinsieme non vuoto $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{O}$, e pertanto sono identicamente nulle. Questo implica $(\Phi, \mathcal{P}(\mathbb{M})\Psi_0) = 0$, da cui $\Phi = 0$. □

Se definiamo *monomio polilocale* una distribuzione a valori operatoriali della forma $X = \phi_{l_1}^{(k_1)}(x_1) \cdots \phi_{l_n}^{(k_n)}(x_n)$, la proprietà di Reeh-Schlieder implica immediatamente il risultato seguente.

Corollario 1. *Se $X\Psi_0 = 0$ per qualche monomio polilocale X , allora $X = 0$.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$ è un aperto, possiamo limitarci al caso in cui $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{O}$. Sia allora \mathcal{Q} un aperto di \mathbb{M} separato da \mathcal{O} da un intervallo spaziale. La condizione di località assicura che, dato $B \in \mathcal{P}(\mathcal{Q})$ esiste $B' \in \mathcal{P}(\mathcal{Q})$ in modo che $XB = B'X$. Allora $XB\Psi_0 = B'X\Psi_0 = 0$, e, per la densità di $\mathcal{P}(\mathcal{Q})\Psi_0$, $X = 0$. \square

Un aspetto fondamentale dell'approccio assiomatico di Wightman consiste, tuttavia, non tanto negli assiomi **W1-W7**, quanto piuttosto nel risultato del teorema di Wightman. Questo dimostra come sia possibile recuperare la teoria (spazio di Hilbert, rappresentazione di \mathfrak{P}_0 e campi) a partire da un insieme di distribuzioni, le *funzioni di Wightman*, che sono definite come l'aspettazione sul vuoto di prodotti dei campi, (2.61).

$$w_{l_1, \dots, l_n}^{(k_1, \dots, k_n)}(x_1, \dots, x_n) = (\Psi_0, \phi_{l_1}^{(k_1)}(x_1) \cdots \phi_{l_n}^{(k_n)}(x_n) \Psi_0) \quad (2.61)$$

Di nuovo, l'esistenza di $w_{l_1, \dots, l_n}^{(k_1, \dots, k_n)}(x_1, \dots, x_n)$ come distribuzioni su $\mathcal{S}(\mathbb{M}^n)$ è garantita dal teorema di nucleo di Schwartz. È usuale, quando non vi sia possibilità di confusione, indicare $w_{l_1, \dots, l_n}^{(k_1, \dots, k_n)}(x_1, \dots, x_n)$ con $w_n(x_1, \dots, x_n)$, e, convenzionalmente, si prende $w_0 = 1$. Gli assiomi di Wightman, allora, impongono che le funzioni di Wightman $\{w_n\}$ soddisfino delle proprietà definite, e riassunte nelle **w1-w7** che seguono.

w1 Le funzioni di Wightman sono distribuzioni a crescita temperata in x_1, \dots, x_n su $\mathcal{S}(\mathbb{M}^n)$.

w2 $\overline{w_{l_1, \dots, l_n}^{(k_1, \dots, k_n)}(x_1, \dots, x_n)} = w_{\bar{l}_n, \dots, \bar{l}_1}^{(\bar{k}_n, \dots, \bar{k}_1)}(x_n, \dots, x_1)$

w3 Per ogni insieme di funzioni $f = \{f_{l_1, \dots, l_j}^{(k_1, \dots, k_j)}(x_1, \dots, x_j)\}$, tutte nulle eccezion

fatta per un numero finito di esse, vale la condizione di positività (2.62).

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \int w_{\bar{l}_m, \dots, \bar{l}_1, l'_1, \dots, l'_n}^{(\bar{k}_m, \dots, \bar{k}_1, k'_1, \dots, k'_n)}(x_m, \dots, x_1, x'_1, \dots, x'_n) \bar{f}_{l_1, \dots, l_m}^{(k_1, \dots, k_m)}(x_1, \dots, x_m) f_{l'_1, \dots, l'_n}^{(k'_1, \dots, k'_n)}(x'_1, \dots, x'_n) dx'_1 \dots dx'_n dx_1 \dots dx_m \geq 0 \quad (2.62)$$

w4 Le funzioni di Wightman sono covarianti, nel senso di (2.63).

$$\sum_{m_1, \dots, m_n} V_{l_1, m_1}^{(k_1)}(\Lambda^{-1}) \dots V_{l_n, m_n}^{(k_n)}(\Lambda^{-1}) w_{m_1, \dots, m_n}^{(k_1, \dots, k_n)}(\Lambda x_1 + a, \dots, \Lambda x_n + a) = w_{l_1, \dots, l_n}^{(k_1, \dots, k_n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.63)$$

w5 La trasformata di Fourier $\tilde{w}(p_1, \dots, p_n)$ è concentrata in $p_k + \dots + p_n \in \bar{V}^-$, $k = 2, \dots, n$.

w6 Le funzioni di Wightman soddisfano la proprietà di cluster, ovvero, se $a \in \mathbb{M}$ è spaziale, nel limite $\lambda \rightarrow \infty$, abbiamo, nel senso delle distribuzioni

$$w_n(x_1, \dots, x_k, x_{k+1} + \lambda a, x_n + \lambda a) \rightarrow w_k(x_1, \dots, x_k) w_{n-k}(x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (2.64)$$

dove $w_n(x_1, \dots, x_n) = w_{l_1, \dots, l_n}^{(k_1, \dots, k_n)}(x_1, \dots, x_n)$.

w7 Le funzioni di Wightman sono simmetriche o antisimmetriche sotto lo scambio di due variabili adiacenti x_j e x_{j+1} .

$$w_n(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = \sigma^{x_j, x_{j+1}} w_n(x_1, \dots, x_{j+1}, x_j, \dots, x_n) \quad (2.65)$$

Notiamo come la proprietà **w4** possa essere riespressa in termini di invarianza sotto traslazioni (**w4'**) e invarianza sotto l'azione di L_+^\uparrow (**w4''**), o, equivalentemente, del suo ricoprimento universale.

w4' Esiste una distribuzione $W_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{M}^{n-1})$ tale per cui $w_n(x_1, \dots, x_n) = W_n(x_1 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1})$.

w4'' La funzione W_n è covariante nel senso di (2.66).

$$\begin{aligned} \sum_{m_1, \dots, m_n} V_{l_1, m_1}^{(k_1)}(\underline{\Lambda}^{-1}) \cdots V_{l_n, m_n}^{(k_n)}(\underline{\Lambda}^{-1}) W_n(\Lambda(\underline{\Lambda})\xi_1, \dots, \Lambda(\underline{\Lambda})\xi_{n-1}) = \\ = W_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Come la proprietà **w4** anche **w5** ammette una espressione alternativa in termini della distribuzione invariante $W_n(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$. Se, infatti, consideramo la trasformata di Fourier $\tilde{W}_n(q_1, \dots, q_{n-1})$ della funzione $W_n(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$, abbiamo

$$\tilde{w}_n(p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^4 \delta(p_1 + \cdots + p_n) \tilde{W}_n(p_1, p_1 + p_2, p_1 + \cdots + p_{n-1}) \quad (2.67)$$

e questo ci permette di riscrivere la condizione spettrale nella forma di **w5'**.

$$\mathbf{w5'} \quad \text{supp } \tilde{W}_n(q_1, \dots, q_{n-1}) \subset \bar{V}^+ \times \cdots \times \bar{V}^+.$$

Come avevamo anticipato, il teorema 5 ci permette di identificare una teoria di Wightman con un insieme $\{w_n : w_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{M}^n)\}$ di distribuzioni soddisfacenti le proprietà **w1-w7**.

Teorema 5 (Wightman). *Dato un insieme di funzioni di Wightman $\{w_n\}$ che soddisfano le proprietà **w1-w7** è possibile ricostruire uno spazio di Hilbert \mathcal{H} con una rappresentazione unitaria di \mathfrak{P}_0 e un insieme di operatori di campo ϕ_i^k che soddisfino **W1-W7**.*

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio \mathcal{D}_0 delle successioni finite di funzioni $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_N)$, dove $\mathbf{f}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{M}^n)$. Notiamo che possiamo dare una caratterizzazione alternativa di \mathcal{D}_0 , tramite

$$\mathcal{D}_0 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}(\mathbb{M}^n) \quad (2.68)$$

e questo ci permette di introdurre su \mathcal{D}_0 la topologia indotta dalla somma diretta, che rende \mathcal{D}_0 uno spazio localmente convesso. Definiremo, su \mathcal{D}_0 , un'involuzione

$\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f}^\dagger$, un prodotto $\mathbf{f}, \mathbf{g} \rightarrow \mathbf{f} \otimes \mathbf{g}$ e un prodotto interno $\mathbf{f}, \mathbf{g} \rightarrow (\mathbf{f}, \mathbf{g})$. Definiamo allora

$$(\mathbf{f} \otimes \mathbf{g})_n = \sum_{k=0}^n f_k(x_1, \dots, x_k) g_{n-k}(x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (2.69)$$

in modo che \otimes sia associativo e continuo nella topologia indotta dalla struttura di somma diretta. Inoltre il prodotto appena definito induce una mappa bilineare $\otimes : \mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0$, di modo che, in definitiva, \mathcal{D}_0 si caratterizzi come l'algebra tensoriale su $\mathcal{S}(\mathbb{M})$, ovvero l'algebra di Borchers \mathcal{B} . Definiamo anche $\mathbf{f}_n^\dagger = \overline{f}_n(x_n, \dots, x_1)$, in modo che l'involuzione sia antilineare e distributiva rispetto al prodotto \otimes . Questo rende \mathcal{D}_0 una $*$ -algebra. Per definire, infine, il prodotto interno, dobbiamo introdurre in funzionali su \mathcal{D}_0 , la cui azione $F(\mathbf{f})$ è definita da

$$F(\mathbf{f}) = F_0 f_0 + F_1(f_1) + \dots + F_N(f_N) \quad (2.70)$$

Con la convenzione $w_0 = 1$, le funzioni di Wightman $\{w_n\}$ che soddisfano **w1-w7** inducono il funzionale di Wightman W , la cui azione è definita da

$$W(\mathbf{f}) = f_0 + w_1(f_1) + \dots + w_N(f_N) \quad (2.71)$$

dove W è invariante di Poincaré, $W(\alpha'_{(a,\Lambda)} \mathbf{f}) = W(\mathbf{f})$, e positivo $W(\mathbf{f} \otimes \mathbf{f}^\dagger) \geq 0$. Il funzionale di Wightman induce a sua volta un prodotto interno non negativo, ma non definito positivo, in \mathcal{D}_0 tramite $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = W(\mathbf{f}^\dagger \otimes \mathbf{g})$. \mathcal{D}_0 si caratterizza dunque per essere uno spazio pre-hilbertiano, e pertanto può essere completato in maniera standard in uno spazio di Hilbert.

Lo spazio \mathcal{D}_0 è inoltre dotato in maniera naturale di una rappresentazione del gruppo di Poincaré \mathfrak{P}_0 , purché si definisca $\alpha'_{(a,\Lambda)} \mathbf{f} = T_{(a,\Lambda)} \mathbf{f} = \{f_j^{(a,\Lambda)}\}$, dove $f_j^{(a,\Lambda)}(x_1, \dots, x_j) = f_j(\Lambda^{-1}(x_1 - a), \dots, \Lambda^{-1}(x_j - a))$, e la rappresentazione è unitaria dal momento che W è invariante di Poincaré.

Infine gli operatori di campo ϕ possono essere definiti, data $h \in \mathcal{S}(\mathbb{M})$, tramite $\phi(h)\mathbf{f} = h\mathbf{f}$, purché si prenda $h\mathbf{f} = (0, hf_0, \dots, hf_{N-1})$. Gli operatori definiti in

questo modo sono covarianti, poiché $T_{(a,\Lambda)}\phi(h)T_{(a,\Lambda)}^{-1} = \phi(h^{(a,\Lambda)})$.

In questo modo le proprietà **W1–W7** valgono in virtù delle rispettive **w1–w7**. Infatti la condizione spettrale vale poiché vale la rispettiva proprietà per la trasformata di Fourier $\tilde{w}_n(p_1, \dots, p_n)$, l'esistenza e unicità del vuoto è equivalente alla proprietà di cluster, e i campi a separazioni spaziali commutano o anticommuto in virtù di **w7**. \square

L'utilizzo delle proprietà delle funzioni **w1–w7** di Wightman come un'alternativa alla quantizzazione canonica può essere dunque avvalorata se consideriamo il caso del campo scalare libero. In tale situazione, infatti, le proprietà **w1–w7** implicano le regole di commutazione canoniche.

Teorema 6 (Jost-Schroer). *Consideriamo un campo $\varphi(x)$, che soddisfi l'equazione di Klein-Gordon $(\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\varphi(x) = 0$, e le cui funzioni di Wightman $w_n(x_1, \dots, x_n)$ soddisfino le proprietà **w1–w7**. Allora*

$$\begin{cases} [\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{y}, t)] = 0 \\ [\partial_0\varphi(\mathbf{x}, t), \partial_0\varphi(\mathbf{y}, t)] = 0 \\ [\varphi(\mathbf{x}, t), \partial_0\varphi(\mathbf{y}, t)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{cases} \quad (2.72)$$

Dimostrazione. L'equazione di Klein-Gordon implica che $\text{supp } \tilde{\varphi}(p) \subseteq \{p : p^2 = m^2\}$, sicché possiamo scomporre il campo $\tilde{\varphi}(p)$ nelle sue componenti $\tilde{\varphi}^\pm(p)$ con supporto sul foglio superiore/inferiore dell'iperboloide $p^2 = m^2$ e la condizione spettrale implica $\tilde{\varphi}^-(p)\Psi_0 = 0$. Inoltre lo stato $\tilde{\varphi}^-(p)\tilde{\varphi}^+(q)\Psi_0$ ha momento totale $p_+ = p+q$ spaziale o nullo e, di nuovo, la condizione spettrale ammette unicamente $p_+ = 0$. Ma allora l'unicità del vuoto Ψ_0 ci permette di scrivere

$$\varphi^-(x)\varphi^+(y)\Psi_0 = \langle \varphi^-(x)\varphi^+(y) \rangle \Psi_0 = \langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle \Psi_0 \quad (2.73)$$

Con la notazione $i\Delta_+(x-y) = \langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle$ e $\Delta(x) = \Delta_+(x) - \Delta_+(-x)$ abbiamo

$$[\varphi(x), \varphi(y)]\Psi_0 = i\Delta(x - y)\Psi_0 + [\varphi^+(x), \varphi^+(y)]\Psi_0 \quad (2.74)$$

Ma, se $\Psi \in \mathcal{H}$ è un vettore qualunque, abbiamo $\text{supp}(\Psi, \tilde{\varphi}^+(p)\tilde{\varphi}^+(q)\Psi_0) \subseteq \overline{V}^+ \times \overline{V}^+$. Pertanto $F(x, y) = (\Psi, \varphi^+(x)\varphi^+(y)\Psi_0)$ è il valore al bordo in senso distribuzionale di una funzione $F(z_1, z_2)$, dove $\Im z_i \in V^+$, che si annulla sul bordo reale quando $(x - y)^2 < 0$ per la condizione di località. Questo implica l'annullamento di $[\varphi^+(x)\varphi^+(y)]\Psi_0$. Ora $[\varphi(x), \varphi(y)] - i\Delta(x - y)$ è un operatore locale che annichila il vuoto, pertanto, in virtù della proprietà di Reeh-Schlieder, è nullo. Le proprietà **W1–W7** impongono allora la forma di $\Delta_+(x)$, da cui seguono le regole di commutazione canoniche. Infatti l'equazione di Klein-Gordon assicura che sia possibile restringere $\phi(x)$ ai piani $x^0 = \text{cost.}$ e, dal momento che è possibile riconoscere in $\Delta(x)$ una soluzione fondamentale dell'equazione di Klein-Gordon (2.75) la regola di commutazione $[\varphi(x), \varphi(y)] = i\Delta(x - y)$ si dimostra equivalente alle equazioni (2.72).

$$\begin{cases} (\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\Delta(x) = 0 \\ \Delta(0, \mathbf{x}) = 0 \\ (\partial_t \Delta)(0, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.75)$$

□

Da ultimo, uno degli aspetti analitici fondamentali implicati da una teoria di Wightman, è espresso dal teorema seguente.

Teorema 7. *La funzione di Wightman $W_n(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$ è, in virtù della condizione spettrale, il valore al bordo in senso di distribuzionale di una $W_n(z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{M}^n)$, olomorfa nel tubo futuro $T^+ = (\mathbb{M} + iV^+)^{n-1}$. Corrispondentemente, $w_n(x_1, \dots, x_n)$ è il valore al bordo, in senso distribuzionale, di $w(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{S}'(\mathbb{M}^n)$, olomorfa in*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^+ = \{ & (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{M}_{(C)}^n : \Re z_j \in \mathbb{M}, \Im(z_{k+1} - z_k) \in V^+, \\ & j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n - 1\} \end{aligned}$$

Inoltre vale la seguente maggiorazione

$$|W_n(z_1, \dots, z_{n-1})| \leq A \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^2 \right)^m \left[\min_j (\Im z_j)^2 \right]^{-l} \quad (2.76)$$

dove $A, m, l \geq 0$.

Tale risultato deriva dal più generale teorema

Teorema 8. *Sia $f(x)$ una distribuzione di $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, con supporto contenuto in un cono convesso puntato chiuso K , con $\text{int } K \neq \emptyset$. Allora l'insieme $\Gamma(f)$*

$$\Gamma(f) = \{q \in \mathbb{R}^n : \exp[-(q, x)]f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n\}$$

soddisfa $\Gamma(f) \supset K^*$, dove

$$K^* = \{q \in \mathbb{R}^n : (q, x) \geq 0, x \in K\}$$

La trasformata di Laplace di f è una funzione olomorfa nel tubo di base $\text{int } K^*$, e soddisfa la maggiorazione

$$|(\mathcal{L}f)(p + iq)| \leq A \frac{(1 + |p + iq|)^m}{d(q, \partial K^*)^l} \quad (2.77)$$

infine, la trasformata di Fourier $\mathcal{F}f$ è il valore al bordo in senso distribuzionale, $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, di $\mathcal{L}f$ nel senso seguente.

$$(\mathcal{F}f)(p) = \lim_{q \rightarrow 0, q \in \text{int } K^*} (\mathcal{L}f)(p + iq) \quad (2.78)$$

Dimostrazione. Dal momento che K è convesso puntato e chiuso, con interno non vuoto, possiamo associare alla distribuzione $f(x)$ la distribuzione $F(x) \in \mathcal{S}'(K)$ in modo tale che

$$(f, u) = (F, u|_K), \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (2.79)$$

Ora $\exp[-(q, x)]$ è un moltiplicatore in $\mathcal{S}(K)$, pertanto $\exp[-(q, x)]F(x)$ è una distribuzione in $\mathcal{S}'(K)$ rispetto alla variabile x . Inoltre abbiamo

$$(e^{-(q, x)} f, u) = (F, e^{-(q, x)} u|_K) \quad (2.80)$$

Ora, se $q \in \text{int } K^*$ e $r = d(q, \partial K^*)$, allora $((q - y), x) \geq 0$ fintanto che $x \in K$ e $y \in \mathbb{R}^n$ con $|y| \leq r$. Ma allora $(q, x) \geq \sup_{|y| \leq r} (y, x) = r|x|$. Pertanto $\exp[-(q, x)] \in \mathcal{S}(K)$ e quindi esiste $u_q \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, che coincide con $\exp[-(q, x)]$ quando $x \in K$. Questo ci permette di concludere che

$$[\mathcal{F}(e^{-(q, x)} f(x))](p) = [\mathcal{F}(u_q(x) f(x))](p) = (f(x), e^{ipx} u_q(x)) \quad (2.81)$$

Infine, per quanto riguarda la trasformata di Laplace, otteniamo

$$(\mathcal{L}f)(k) = (F(x), e^{ikx}|_K) \quad (2.82)$$

Ora, se $q \in \text{int } K^*$, $e^{ikx} \in \mathcal{S}(K)$ è una test funzione che dipende analiticamente da k e, dal momento che F è un funzionale continuo su $\mathcal{S}(K)$, anche la trasformata di Laplace (2.82) è analitica in k . Inoltre vale la maggiorazione seguente

$$|(F, u)| \leq A' \|u\|_{V', m'}^K, \quad \forall u \in \mathcal{S}(K) \quad (2.83)$$

che ci fornisce, per la trasformata di Laplace

$$|(\mathcal{L}f)(k)| \leq A' \|e^{ikx}\|_{V', m'}^K, \quad q \in \text{int } K^* \quad (2.84)$$

e questo conduce alla maggiorazione nella forma richiesta (2.77).

Da ultimo, la relazione (2.80) assicura, qualora $q \rightarrow 0$ con $q \in \text{int } K^*$, che valga $\exp[-(q, x)]f(x) \rightarrow f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, che è equivalente a (2.78). \square

2.5 Spazi curvi: F -località

La generalizzazione dell'approccio assiomatico al caso di una teoria di campo su un background gravitazionale g non è un procedimento immediato. Difatti la QFT su spaziotempo curvo risulta afflitta da patologie quali la non unicità dello stato di vuoto (con le relative trasformazioni di Bogolyubov e le loro conseguenze, tra le quali, per esempio, l'effetto Unruh); l'inesistenza a priori di simmetrie in un generico spaziotempo (\mathcal{M}, g) ; l'esistenza, su spazi con superfici di Cauchy non compatte, di costruzioni unitariamente inequivalenti dei campi scalari liberi, senza che alcuna di queste risulti essere privilegiata. Se poi si tenta la quantizzazione di un campo, sia per semplicità un campo scalare, su uno spaziotempo non globalmente iperbolico, per esempio X_d , insorgono ulteriori complicazioni, tra le quali possiamo annoverare la definizione non univoca dei commutatori degli operatori di campo e l'impossibilità di definire problemi di Cauchy ben posti.

Tra le difficoltà intrinseche nella definizione di una QFT su spazio curvo possiamo annoverare la non immediatezza nel trovare una generalizzazione coerente con il caso minkowskiano dell'assioma di località, dovuto a R. Haag, su uno spazio non globalmente iperbolico. Tale difficoltà non è tuttavia marginale, dal momento l'assioma di località incorpora in una forma matematicamente coerente tutta l'intuizione fisica circa il comportamento di un campo quantistico. Una trattazione approfondita di tale questione, assieme ad una proposta di soluzione, è dovuta a B. Kay, [41]. Dunque, dato uno spazio globalmente iperbolico e un insieme di operatori di campo è possibile costruire una $*$ -algebra $\mathcal{A}(\mathcal{M}, g)$, l'*algebra minimale*, generata dagli operatori di campo agenti su test-funzioni in $\mathcal{D}(\mathcal{M})$. Tale algebra minimale può anche essere dotata di una struttura addizionale, se ad ogni insieme aperto con chiusura compatta $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ si associa la sottoalgebra $\mathcal{A}(\mathcal{M}, g; \mathcal{O})$ di (\mathcal{M}, g) generata dagli operatori di campo agenti su funzioni in $\mathcal{D}(\mathcal{O})$. Le proprietà delle sottoalgebre $\mathcal{A}(\mathcal{M}, g; \mathcal{O})$ sono completamente analoghe a quelle di

$\mathcal{A}(\mathcal{M}, \mathbf{g})$. L'intuizione fisica per cui le leggi in un sottoinsieme “piccolo” di uno spazio non globalmente iperbolico debbano essere analoghe a quelle usuali su uno spazio globalmente iperbolico conduce dunque alla formulazione del requisito di F -località.

F -località Sia \mathcal{M} una varietà e p un punto $p \in \mathcal{M}$. La varietà \mathcal{M} è *quantisticamente compatibile* o *F -locale* in p se ogni intorno di p contiene un sotto-intorno globalmente iperbolico \mathcal{N} tale per cui la restrizione $\mathcal{A}(\mathcal{M}, \mathbf{g}; \mathcal{N})$ di $\mathcal{A}(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ coincida con l'algebra “intrinseca” $\mathcal{A}(\mathcal{N}, \mathbf{g})$ che si otterrebbe considerando \mathcal{N} come una varietà globalmente iperbolica a sé stante e quantizzando su di essa (dato un orientamento temporale) nella maniera usuale.

È da notare come la F -località sia da considerarsi unicamente come una proposta per una condizione necessaria alla compatibilità quantistica per spazi non globalmente iperbolici. È altresì possibile dimostrare come qualunque spazio globalmente iperbolico sia F -quantisticamente compatibile e come, invece, nessuno spazio non temporalmente orientabile lo sia.

2.5.1 Un caso particolare: X_d

Nel caso particolare di X_d notiamo come, nonostante non possenga una struttura di ordinamento temporale globale, tuttavia X_d ammetta un orientamento temporale globale, e dunque potrebbe essere quantisticamente compatibile. In ogni caso, un importante risultato, [41], ci permetterà di mostrare come X_d sia effettivamente compatibile con una teoria quantistica di campo nel senso della F -località.

Proposizione 9. *Qualunque sottospazio di uno spaziotempo globalmente iperbolico è F -locale.*

A questo punto possiamo notare come la compattificazione dello spaziotempo di Anti-de Sitter (paragrafo 1.5) mappi X_d in un sottospazio dell'universo statico di Einstein. Quest'ultimo è uno spaziotempo globalmente iperbolico, e dun-

que F -locale, ma, in virtù della proposizione 9, questo a sua volta implica la compatibilità quantistica di X_d .

QFT su X_d

3.1 Anti-de Sitter

Nel capitolo 1 abbiamo definito lo spazio di Anti-de Sitter d -dimensionale X_d , per mezzo della sua immersione nello spazio $(d + 1)$ -dimensionale $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$, dotato del prodotto interno (\cdot, \cdot) .¹ La definizione della complessificazione $X_d^{(C)}$ di X_d segue naturalmente.

$$\begin{aligned} X_d^{(C)} &= \{z = x + iy, z^2 = 1\} \\ &= \{z = x + iy, x^2 - y^2 = 1, (x, y) = 0\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Abbiamo anche notato come il gruppo delle isometrie di X_d (o, equivalentemente, di $X_d^{(C)}$) sia il gruppo pseudo-ortogonale $G = SO(2, d - 1)$, la cui azione sulla complessificazione di X_d è definita tramite $gz = gx + igy$, se $g \in G$ e $z \in X_d^{(C)}$. Il gruppo G agisce transitivamente su X_d , e sarà utile definire un punto base b , le cui componenti sceglieremo essere $b^\mu = \delta^\mu_d$. Indicheremo allora con $G_b \subseteq G$ lo stabilizzatore di G nel punto $b \in X_d$, come in (3.2).

$$G_b = \{g \in G : gb = b\} \tag{3.2}$$

Abbiamo anche definito il cono asintotico C e il cono complesso $C^{(C)}$, la cui

¹La definizione che abbiamo dato di X_d non è la più generale possibile. Potremmo definire, più in generale, lo spazio di Anti-de Sitter di raggio R come l'insieme dei punti in $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$ tali per cui $x^2 = R^2$. Noi ci limiteremo al caso $R = 1$.

definizione sarà utilizzata estensivamente nel seguito.

Utilizzeremo anche la nozione della misura G -invariante $d\sigma$ su X_d (o su $X_d^{(C)}$), che può essere scritta nella notazione di Leray come in (3.3).

$$d\sigma(x) = \frac{dx^0 \wedge \cdots \wedge x^d}{d(x^2 - 1)} \Big|_{X_d} = \frac{dx^1 \wedge \cdots \wedge x^d}{2|x^0|} \quad (3.3)$$

Infine, se ci concentriamo esclusivamente sulla versione complessificata $X_d^{(C)}$ di X_d , possiamo notare semplicemente che $X_d^{(C)}$ si scompone su tre insiemi disgiunti \mathcal{T}_0 , \mathcal{T}_L e \mathcal{T}_χ . Questi risultano inoltre invarianti sotto l'azione di $G_0 = SO_0(2, d-1)$, come appare immediatamente esaminando le definizioni (3.4).

$$\mathcal{T}_0 = \{z = x + iy \in X_d^{(C)} : y^2 = x^2 - 1 = 0\} \quad (3.4a)$$

$$\mathcal{T}_L = \{z = x + iy \in X_d^{(C)} : y^2 = x^2 - 1 < 0\} \quad (3.4b)$$

$$\mathcal{T}_\chi = \{z = x + iy \in X_d^{(C)} : y^2 = x^2 - 1 > 0\} \quad (3.4c)$$

3.2 Tuboidi chirali

L'insieme \mathcal{T}_χ è separabile in due componenti disgiunte, aperte e connesse, che chiameremo i *tuboidi chirali* \mathcal{T}^{\leftarrow} e $\mathcal{T}^{\rightarrow}$, definiti come in (3.5).

$$\mathcal{T}^{\rightleftharpoons} = \{z = x + iy \in \mathcal{T}_\chi : \epsilon(z) = \pm\} \quad (3.5)$$

La definizione (3.5) caratterizza i punti dei tuboidi $\mathcal{T}^{\rightleftharpoons}$ tramite la loro proprietà di chiralità $\epsilon(z) = \text{sgn}(y^0 x^d - x^0 y^d)$. Nel caso particolare di $d = 2$ la chiralità può essere espressa come $\epsilon(z) = \det(e, x, y)$, dove e è un punto in C_+ ([11]). I tuboidi $\mathcal{T}^{\rightleftharpoons}$ sono generati dall'azione del gruppo G su due insiemi, h_{\rightleftharpoons} , come dimostra la

proposizione 10, risultato che utilizzeremo estensivamente.

Proposizione 10. *Gli insiemi $\mathcal{T}^{\rightleftharpoons}$ sono generati rispettivamente dall'azione di G sui due insiemi h_{\rightleftharpoons} definiti come segue, $\mathbf{0}_{d-1}$ è il vettore zero in \mathbb{R}^{d-1} .*

$$h_{\leftarrow} = \{z = (i \sinh v, \mathbf{0}_{d-1}, \cosh v), v > 0\} \quad (3.6a)$$

$$h_{\rightarrow} = \{z = (i \sinh v, \mathbf{0}_{d-1}, \cosh v), v < 0\} \quad (3.6b)$$

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare la tesi nel caso di $\mathcal{T}^{\rightarrow}$, che vogliamo sia generato dall'azione di G su h_{\rightarrow} . Per far ciò, sia G_b lo stabilizzatore in G di b , di modo che la sua rappresentazione in $GL(d+1)$ sia della forma (3.7).

$$G_b \ni g = \begin{bmatrix} \Lambda_{(d)} & \mathbf{0}_d \\ \mathbf{0}_d & 1 \end{bmatrix} : \Lambda_{(d)} \in SO(1, d-1) \quad (3.7)$$

Ci si può convincere facilmente di ciò pensando ad un elemento di G nella sua forma matriciale (3.8), dove \mathbf{M} è una matrice $d \times d$, \mathbf{a} e \mathbf{b} sono vettori di $\mathbb{R}^{(1, d-1)}$ e c è un numero.

$$G \ni g = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{a} \\ \mathbf{b} & c \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

In questo modo $gb = b$ implica $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Per dimostrare che $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ si può ricordare che, per definizione, se \mathbf{g} è la matrice rappresentativa del tensore metrico, e $\Lambda \in G$, allora $\Lambda^T \mathbf{g} \Lambda = \mathbf{g}$. Applicando $g^T \mathbf{g}$ all'uguaglianza $gb = b$ otteniamo $g^T b = b$, da cui si conclude $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, dal momento che $\mathbf{g}b = b$. Sia ora $z = x + iy$ un punto di $\mathcal{T}_{\rightarrow}$. Per definizione di $\mathcal{T}_{\rightarrow}$, x è vincolato ad appartenere all'iperboloide di equazione $x^2 = \cosh^2 v$. Dal momento che l'azione del gruppo G è transitiva su $X_d^{(C)}$, esiste un elemento g di G tale per cui $gx = b_v = b \cosh v$. Inoltre, dal momento che il prodotto interno (\cdot, \cdot) è invariante sotto G , deve valere $(gx, gy) = (b_v, gy) = 0$ e, per questo motivo, $(gy)^2 = \sinh^2 v$. Questo dimostra che $gz = gx + igy$ deve essere

della forma (3.9).

$$gz = \begin{bmatrix} \Lambda_{(d)} & \mathbf{0}_d \\ \mathbf{0}_d & 1 \end{bmatrix} z' : z' \in h_{\rightarrow} \quad (3.9)$$

Pertanto, scelto un punto qualunque $z \in \mathcal{T}^{\rightarrow}$, esiste un punto $z' \in h_{\rightarrow}$ in modo tale che $gz = g_b z'$. Questo implica automaticamente che $\mathcal{T}^{\rightarrow} \subseteq Gh_{\rightarrow}$, da cui segue la tesi della proposizione. \square

Notiamo che si può fornire una definizione alternativa dei tuboidi chirali, se si definisce $\mathcal{C}_1 \in \mathfrak{G}$ come l'insieme degli elementi di \mathfrak{G} della forma $\ell(a \wedge b)$, con $(a, a) = (a, b) = 1$ e $(a, b) = 0$. Equivalentemente, \mathcal{C}_1 può essere introdotto tramite (3.10).

$$\mathfrak{G} \supset \mathcal{C}_1 = \{\Lambda \mathfrak{M}_{0d} \Lambda : \Lambda \in G_0\} \quad (3.10)$$

Data questa definizione, \mathcal{C}_+ sarà il cono in \mathfrak{G} generato da \mathcal{C}_1 , equazione (3.11).

$$\mathfrak{G} \supseteq \mathcal{C}_+ = \bigcup_{\rho > 0} \rho \mathcal{C}_1 \quad (3.11)$$

Allora, prendendo $\mathbb{C}_+ = \{w \in \mathbb{C} : \Im w > 0\} = -\mathbb{C}_-$, i tuboidi chirali \mathcal{T}^{\leftarrow} sono definiti come nell'equazione (3.12).

$$\mathcal{T}^{\leftarrow} = \{\exp[\tau \mathfrak{M}]x : x \in X_d; \mathfrak{M} \in \mathcal{C}_1; \tau \in \mathbb{C}_+\} = \overline{\mathcal{T}^{\rightarrow}} \quad (3.12)$$

Inoltre, il prodotto scalare in $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$ induce un prodotto scalare sui tensori controvarianti di ordine k , in modo che si abbia l'equazione (3.13).

$$(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k, b_1 \otimes \cdots \otimes b_k) = (a_1, b_1) \cdots (a_k, b_k) \quad (3.13)$$

Con questa definizione si ha evidentemente

$$\frac{1}{2} (e_0 \wedge e_d, a \wedge b) = a_0 b_d - a_d b_0 \quad (3.14)$$

di modo che $\epsilon(x + iy) = \text{sgn} [(e_0 \wedge e_d, y \wedge x)]$. L'equivalenza tra le due definizioni di \mathcal{T}^{\leftarrow} è infine stabilita dalla seguente proposizione.

Proposizione 11. *L'insieme \mathcal{T}^{\leftarrow} definito in (3.12) soddisfa le seguenti proprietà.*

1. $\mathcal{T}^{\leftarrow} = \{z \in \mathbb{C}^{(2,d-1)} : z^2 = 1, (\Im z)^2 > 0, \epsilon(z) > 0\}$
2. $\mathcal{T}^{\leftarrow} = \{\Lambda \exp[it\mathfrak{M}_{0d}]e_d : \Lambda \in G_0, t > 0\}$
3. $z \in \mathcal{T}^{\leftarrow} \Rightarrow z^0, z^d \neq 0, \Im(z^0/z^d) > 0$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{T}_1 = \{z \in \mathbb{C}^{(2,d-1)} : z^2 = 1, (\Im z)^2 > 0, \epsilon(z) > 0\}$ e $\mathcal{T}_2 = \{\Lambda \exp[it\mathfrak{M}_{0d}]e_d : \Lambda \in G_0, t > 0\}$. Data l'invarianza di \mathcal{T}^{\leftarrow} sotto G evidentemente $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}^{\leftarrow}$. D'altra parte, se $\mathcal{T}^{\leftarrow} \ni z = \exp[\mathfrak{M}\tau]x$ e Λ_0 è tale per cui $\Lambda_0\mathfrak{M}\Lambda_0^{-1} = \mathfrak{M}_{0d}$, si ha $\Lambda_0 z = \exp[\mathfrak{M}(s + it)]x'$, con $x' \in X_d$, in modo che $(x')^0 = 0$ e $(x')^d > 0$. In questo modo $z = \Lambda_1 z'$, dove $\Lambda_1 = \Lambda_0^{-1} \exp[\mathfrak{M}_{0d}s]$ e $\epsilon(z') > 0$, da cui $z, z' \in \mathcal{T}_1$. Questo ci garantisce che $\mathcal{T}^{\leftarrow} \subseteq \mathcal{T}_1$. Infine, se $z = x + iy \in \mathcal{T}_1$, esiste sempre una trasformazione $\Lambda \in G_0$ e un reale $t \in \mathbb{R}_+$ in modo tale che $x = (\Lambda \cosh t)e_d$ e $y = (\Lambda \sinh t)e_0$, ovvero $z = \Lambda \exp[it\mathfrak{M}_{0d}]e_d$, e $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. In definitiva, abbiamo $\mathcal{T}^{\leftarrow} \subseteq \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}^{\leftarrow}$, e questo dimostra l'equivalenza delle definizioni. \square

Può ora essere utile fornire una parametrizzazione di $X_d^{(C)}$, analoga a (1.42), che sarà utilizzata in seguito. Sceglieremo per $X_d^{(C)}$ il sistema di coordinate in (3.15).

$$\begin{aligned}
X_d^{(C)} \ni z = & [\cosh \Psi \cos \Phi, \sinh \Psi \cos \theta_1, \\
& , \sinh \Psi \sin \theta_1 \cos \theta_2, \dots, \\
& , \sinh \Psi \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{d-2}, \cosh \Psi \sin \Phi]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Tutti i parametri in (3.15) sono complessi, ovvero $\Psi = \psi + i\chi$, $\Phi = \phi + i\varphi$, $\theta_i = u_i + iv_i$.

Proposizione 12. *La proiezione degli insiemi $\mathcal{T}^{\leftrightarrow}$ sul piano di coordinata $z^d = (z, b)$ è il piano tagliato $\Theta_\chi = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Inoltre, l'immagine dei prodotti $\mathcal{T}^{\rightarrow} \times \mathcal{T}^{\leftarrow}$ e $\mathcal{T}^{\leftarrow} \times \mathcal{T}^{\rightarrow}$ sotto la mappa $z, w \rightarrow (z, w)$ è ancora il piano Θ_χ .*

Dimostrazione. Iniziamo dimostrando che la proiezione di $\mathcal{T}^{\rightarrow}$ o \mathcal{T}^{\leftarrow} sul piano (z, b) è Θ_χ . In virtù della proposizione 10 possiamo inizialmente considerare gli insiemi h_{\leftarrow} o h_{\rightarrow} . Se applichiamo una trasformazione $\tilde{g} \in G$ della forma (3.16) notiamo che l'intera linea immaginaria ($\theta = \pi/2$) e l'insieme $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ (corrispondente alle scelte $\theta = 0$ e $\theta = \pi$) sono sottoinsiemi della proiezione di $\mathcal{T}^{\rightarrow}$ o \mathcal{T}^{\leftarrow} sulla coordinata d -sima. Qualunque altro numero complesso può essere ottenuto a partire da h_{\rightarrow} utilizzando un angolo θ arbitrario, per poi proiettare sulla d -sima coordinata.

$$\tilde{g} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \mathbf{0}_{d-1} & -\sin \theta \\ \mathbf{0}_{d-1} & \mathbb{1}_{d-1} & \mathbf{0}_{d-1} \\ \sin \theta & \mathbf{0}_{d-1} & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Viceversa, se $\bar{z} \in X_d^{(C)}$ è un punto tale per cui $(\bar{z}, b) \in]-1, 1[$, allora $\bar{z} \notin \mathcal{T}^{\leftrightarrow}$. Infatti il punto \bar{z} deve soddisfare l'equazione dell'iperboloide $\bar{z}^2 = 1$, che si traduce in $x^2 - y^2 = 1$ e $(x, y) = 0$. Supponiamo allora, per assurdo, che $\bar{z} \in \mathcal{T}^{\rightarrow}$ (risp. $\bar{z} \in \mathcal{T}^{\leftarrow}$) e sia $\bar{z} = (\hat{z}, z^d)$, dove $\hat{z} = \hat{x} + i\hat{y} \in \mathbb{R}^{1, d-1}$. L'assunzione $|z^d| < 1$ implica che $\hat{x}^2 - \hat{y}^2 > 0$. Siano \hat{x} e \hat{y} definiti come segue: $\hat{x} = (x^0, \mathbf{x})$ e $\hat{y} = (y^0, \mathbf{y})$. Allora l'uguaglianza $(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ implica che $x^0 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})/y^0$, dove $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ è il prodotto scalare standard euclideo in \mathbb{R}^{d-1} . Possiamo allora stimare il segno di \hat{x}^2 come è mostrato in (3.17).

$$\begin{aligned} \hat{x}^2 &= (x^0)^2 - \mathbf{x}^2 \\ &= \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 - \mathbf{x}^2 (y^0)^2}{(y^0)^2} \\ &\leq \frac{\mathbf{x}^2 \mathbf{y}^2 - \mathbf{x}^2 (y^0)^2}{(y^0)^2} \\ &= -\hat{y}^2 \frac{\mathbf{x}^2}{(y^0)^2} \leq 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

L'ultima disuguaglianza in (3.17) risulta valida in virtù dell'ipotesi $\hat{y}^2 > 0$. A questo punto, affinché si abbia $\hat{x}^2 - \hat{y}^2 > 0$ sarebbe necessario che \hat{y} sia $\hat{y}^2 \leq 0$, ma questo è assurdo. Tramite lo stesso argomento possiamo mostrare come nemmeno il punto $z = (\hat{z}, \pm 1)$ possa appartenere all'insieme $\mathcal{T}^{\leftrightarrow}$, dal momento che questo implicherebbe $\hat{x}^2 = \hat{y}^2 = 0$.

Per quanto riguarda, invece, la seconda parte della proposizione, è utile utilizzare la parametrizzazione (3.15). Inoltre, in virtù dei risultati della proposizione 10 possiamo restringere l'attenzione ai soli punti $z' \in h_{\leftarrow}$, mantenendo tuttavia $z \in \mathcal{T}_{\leftarrow}$. In questo modo z' sarà della forma (3.18).

$$z' = [\pm i \sinh(v), \mathbf{0}_{d-1}, \cosh(v)], \quad v > 0 \quad (3.18)$$

Nel seguito ci concentreremo sul caso $z' \in h_{\leftarrow}$ e $z \in \mathcal{T}^{\rightarrow}$. Possiamo allora eseguire una rotazione g di un angolo iv in modo da trasformare $z' \rightarrow b$. D'altro canto, z subirà la trasformazione mostrata in (3.19).

$$\begin{aligned} z \rightarrow & [\cosh \Psi \cos(\phi + i[\varphi + v]), \dots, \\ & \cosh \Psi \sin(\phi + i[\varphi + v])] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Infine, calcolando l'espressione per la proprietà di chiralità di z troviamo il risultato (3.20), dal momento che la funzione seno iperbolico è crescente e $v > 0$.

$$\begin{aligned} \epsilon(gz) &= y^0 x^d - x^0 y^d \\ &= \frac{1}{4} [\cos(2\chi) + \cosh(2\psi)] \sinh[2(\varphi + v)] \\ &\geq \frac{1}{4} [\cos(2\chi) + \cosh(2\psi)] \sinh(2\varphi) \\ &= \epsilon(z) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Pertanto $gz \in \mathcal{T}^{\leftrightarrow}$ se $z \in \mathcal{T}^{\leftrightarrow}$, e la tesi segue dal momento che $(z, z') = (gz, b) \in \Theta_\chi$. □

3.3 Funzioni di Gegenbauer

Sia \mathcal{M} una sottovarietà d -dimensionale di \mathbb{C}^{d+1} , e sia essa definita come l'insieme di livello zero della funzione $f(z)$.² Possiamo dotare \mathcal{M} di una forma volume in maniera naturale in virtù del suo embedding in uno spazio che già ne possiede una. Definiremo tale forma $\omega_{\mathcal{M}}$ come la d -forma su \mathbb{C}^{d+1} che soddisfa l'uguaglianza $\omega_{\mathcal{M}} = i_{\mathbf{n}}\tau$, dove τ è la forma volume di \mathbb{C}^{d+1} , e \mathbf{n} è il vettore normale a \mathcal{M} e corrispondente alla 1-forma df . Nel caso di X_d abbiamo già dato un'espressione esplicita della forma ω_{X_d} nella notazione di Leray, equazione (3.3). Più generalmente, potremmo scrivere, ancora nell'ambito della notazione di Leray, l'equazione (3.21).

$$\omega_{\mathcal{M}}(x) = \frac{dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{d+1}}{(df)(x)} \quad (3.21)$$

Sia ora γ un ciclo sulla varietà \mathcal{M} , il cui supporto sia $\text{supp}(\gamma) = \{\xi \in \mathcal{M} : \xi = \gamma(x), x \in \mathcal{M}\}$. Anche su γ possiamo definire una misura $d\mu_{\gamma}$ in maniera naturale. Infatti, se Ξ è il campo vettoriale $\xi^{\mu}\partial_{\mu}$ e $i_{\Xi}\omega_{\mathcal{M}}$ è la contrazione tra Ξ e la d -forma volume su \mathcal{M} , la restrizione ai punti di γ di $i_{\Xi}\omega_{\mathcal{M}}$ sarà la misura su γ , $d\mu_{\gamma}$.

$$d\mu_{\gamma} = i_{\Xi}\omega_{\mathcal{M}}|_{\gamma} \quad (3.22)$$

Un'importante proprietà della misura invariante $d\mu_{\gamma}$ è espressa dalla proposizione 13, del cui risultato faremo uso estensivo in ciò che segue.

Proposizione 13. *Date una sottovarietà d -dimensionale \mathcal{M} di \mathbb{C}^{d+1} , definita come l'insieme di livello zero di una funzione f , e una funzione $\varphi(\xi)$ su \mathcal{M} , omogenea di grado $1 - d$, la $(d - 1)$ -forma $\text{var}\phi \cdot i_{\Xi}\omega_{\mathcal{M}}|_{\gamma}$ è chiusa.*

Dimostrazione. Prendiamo una funzione $\varphi(\xi)$ su \mathcal{M} come nelle ipotesi, e calcolia-

²Le considerazioni che seguono hanno completa generalità e non sono valide unicamente per il caso di una sottovarietà di \mathbb{C}^n .

mo la derivata esterna $d[\varphi \cdot i_{\Xi}\omega_{\mathcal{M}}|_{\gamma}]$.

$$\begin{aligned}
d[\varphi \wedge i_{\Xi}\omega_{\mathcal{M}}] &= d[i_{\varphi}\Xi\omega_{\mathcal{M}}] \\
&= \mathcal{L}_{\varphi}\Xi\omega_{\mathcal{M}} - i_{\varphi}\Xi d\omega_{\mathcal{M}} \\
&= \varphi(\mathcal{L}_{\Xi}\omega_{\mathcal{M}}) + d\varphi \wedge i_{\Xi}\omega_{\mathcal{M}} - \varphi(i_{\Xi}d\omega_{\mathcal{M}}) \\
&= [(d-1)\varphi + i_{\Xi}d\varphi]\omega_{\mathcal{M}}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Ora, dal momento che in una carta locale $i_{\Xi}d\varphi = \xi^{\mu}\partial_{\mu}\varphi$, notiamo che la forma $d\mu_{\gamma}$ è chiusa se φ è una funzione omogenea di grado $1-d$. \square

In ciò che segue utilizzeremo la definizione del cono complesso $C^{(C)}$ che abbiamo già utilizzato nel paragrafo 1.3. Se studiamo più a fondo la geometria del cono complesso, scopriamo che i suoi punti soddisfano $(\Im\xi)^2 \leq 0$ e $C^{(C)}$ risulta essere l'unione disgiunta $C^{(C)} = C \cup C_{\leftarrow} \cup C_{\rightarrow}$, dove C è il cono asintotico in $\mathbb{R}^{(2,d-1)}$, mentre gli insiemi C_{\rightleftharpoons} , i *coni chirali*, sono definiti come in (3.24).

$$C_{\rightleftharpoons} = \{\xi \in C^{(c)} : \epsilon(\xi) = \pm\} \tag{3.24}$$

Notiamo che la definizione dei coni chirali (3.24) è simile a quella di $\mathcal{T}^{\rightleftharpoons}$ (3.5), e, in effetti, tali insiemi condividono una proprietà simile, che, nel caso di C_{\rightleftharpoons} si traduce nel risultato della proposizione 14.

Proposizione 14. *I coni chirali, definiti in (3.24), sono generati dall'azione di G sugli insiemi $\gamma_{\rightleftharpoons}^{(0)}$, definiti in (3.25).*

$$\gamma_{\rightleftharpoons}^{(0)} = \{\xi \in C : \xi = (\sin \Psi, \hat{\mathbf{r}}, \cos \Psi), \hat{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^{d-1}, |\hat{\mathbf{r}}| = 1, \Psi = u + iw, \text{sgn}(w) = \pm\} \tag{3.25}$$

Definiamo ora una famiglia di cicli, eventualmente dipendenti da z , nell'omologia relativa $H^1(\mathbb{C}^{(2,d-1)}, \{\xi : (\xi, z) = 0\})$. Dal momento che $\mathcal{T}^{\rightleftharpoons}$ sono generati dall'azione di G su h_{\rightleftharpoons} , come abbiamo dimostrato nella proposizione (10), possiamo limitarci a dare un'espressione esplicita di $\gamma(z)$ unicamente per quei punti z_v

giacenti in h_{Ξ} . Definiremo il ciclo nella sottovarietà $\xi_{(0)} \in \gamma^{(0)}$. Dal momento che gli estremi del ciclo γ debbono soddisfare $(z, \xi) = 0$ e $(z_v, \xi_{(0)}) = \cos(\Psi - iv) = 0 \Leftrightarrow \Psi = \pm\pi/2 + iv$, definiremo $\gamma(z_v)$ tramite la mappa $\phi \rightarrow \Psi = \phi + iv$, permettendo a ϕ di prendere valori in $[-\pi/2, \pi/2]$. La misura di integrazione per $\gamma(z)$ sarà dunque della forma (3.26), dove $d\Omega_{(d-1)}$ è l'elemento sferico euclideo $(d-1)$ -dimensionale.

$$d\mu_{\gamma(z)}(\xi) = i_{\Xi}\omega_{\tilde{X}(c)}\Big|_{\gamma(z)} = -\frac{1}{2}d\Omega_{(d-1)}d\phi \quad (3.26)$$

Il ciclo $\gamma(z)$, quando $z \in \mathcal{T}^{\leftarrow}$ soddisfa l'utile proprietà espressa dalla proposizione (15).

Proposizione 15. *Se $z \in \mathcal{T}^{\leftarrow}$ e $z' \in \text{cl } \mathcal{T}^{\rightleftarrows}$, allora $(z', \xi) \neq 0, \forall \xi \in \gamma(z)$.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare la proposizione nel caso in cui $z \in h_{\Xi}$ e $z' \in \text{cl } \mathcal{T}^{\rightleftarrows}$, sicché si abbia $z = z_v$, e conseguentemente $\gamma(z) = \gamma(z_v)$. La dimostrazione è allora analoga a quella riportata per la proposizione 18. \square

Data la definizione del ciclo $\gamma(z)$, calcoleremo l'integrale (3.27).

$$I_l^k[(z, z')] = \int_{\gamma(z)} (z, \xi)^{l-k} (\xi, z')^{-l-k-1} d\mu_{\gamma(z)}(\xi) \quad (3.27)$$

Per far ciò utilizzeremo i punti particolari $z = z_v$ e $z' = b$, di modo che $\gamma(z)$ assuma la forma esplicita data in precedenza.

$$\begin{aligned} I_l^k[(z, z')] &= \int_{\gamma(z)} (z, \xi)^{l-k} (\xi, z')^{-l-k-1} d\mu_{\gamma(z)}(\xi) \\ &= \int_{\gamma(z)} [\cos \phi]^{l-k} [\cos(\phi + iv)]^{-l-k-1} d\mu_{\gamma(z)}(\xi) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\gamma(z)} [\cos \phi]^{-1-2k} [\cosh v - i \tan \phi \sinh v]^{-l-k-1} d\Omega_{d-1} d\phi \\ &= -\frac{S_{d-2}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 + t^2]^{k+1/2} \frac{[\cosh v - it \sinh v]^{-l-k-1}}{1 + t^2} dt \end{aligned} \quad (3.28)$$

Cambiando la variabile di integrazione da t a $t = i\tau$ tramite distorsione del cammino di integrazione abbiamo $\tau \geq 1$. Per questo motivo cambieremo nuovamente

la variabile, operando la sostituzione $\tau = \cosh u$.

$$\begin{aligned} I_l^k[(z, z')] &= \frac{2\pi^{(d-1)/2}(-1)^{k+1}}{\Gamma[(d-1)/2]} \int_0^{+\infty} [\sinh u]^{2k} [\cosh v + \cosh u \sinh v]^{-l-k-1} du \\ &= -\frac{(2)^{k+1}\pi^{(d-2)/2}}{\Gamma[(d-1)/2]} \frac{\Gamma(l-k+1)\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(l+k+1)} ((z, z') - 1)^{-k/2} Q_l^k[(z, z')] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Le funzioni $Q_l^k(z)$ sono le funzioni associate di Legendre del secondo tipo, e, seguendo la notazione di Chu e Stratton [18], sono legate alle funzioni di Gegenbauer del secondo tipo D_l^k tramite (3.30).

$$D_{l-k}^k(z) = (z^2 - 1)^{-k/2} Q_l^k(z) \quad (3.30)$$

Questo ci permette di riscrivere (3.29) nella forma più compatta dell'equazione (3.31).

$$I_l^k[(z, z')] = -\frac{(2)^{k+1}\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{\Gamma(l-k+1)\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(l+k+1)} D_{l-k}^k[(z, z')] \quad (3.31)$$

Affinché (3.31) possa essere presa come la definizione delle funzioni di Gegenbauer del secondo tipo, o, equivalentemente, delle funzioni associate di Legendre del secondo tipo, è necessario che l'equazione (3.31) sia valida anche per $z \in \mathcal{T}^{\leftrightarrow}$, $z' \in \mathcal{T}^{\rightleftarrows}$. Anzitutto, allora, possiamo stabilire la validità della proposizione (16).

Proposizione 16. *L'integrale (3.27), definito per $(z, z') \in \mathcal{T}^{\leftrightarrow} \times \mathcal{T}^{\rightleftarrows} = \mathcal{T}^{\leftrightarrow\rightleftarrows}$, è indipendente dalla scelta del ciclo $\gamma(z)$ nella sua classe di omologia relativa, se $k = (d-2)/2$. Inoltre, esso è invariante sotto trasformazioni di G , ovvero $I_l^k[(z, z')] = I_l^k[(gz, gz')]$.*

Dimostrazione. La prima parte della proposizione è una conseguenza immediata del teorema di Stokes, in virtù della proposizione 13, e del fatto che $\gamma(z)$ sia un ciclo relativo il cui bordo appartiene ad un insieme analitico. Per quanto riguarda, invece, l'invarianza sotto trasformazioni di $G = SO(2, d-1)$, avremo bisogno del

risultato della proposizione (15). Se questa risulta valida, infatti, l'integrale è ben definito in $\mathcal{T}^{\leftrightarrow}$, e, data la proprietà di invarianza degli insiemi $\mathcal{T}^{\leftrightarrow}$ sotto l'azione di $g \in G$, anche $I_l^k[(gz, gz')]$ è ben definito. Inoltre, per costruzione, la trasformazione $z, z' \rightarrow gz, gz'$ impone l'integrazione sul ciclo $\gamma(gz)$. Notiamo dunque che il ciclo $g\gamma(z)$ risiede nella medesima classe di omologia di $\gamma(gz)$, di modo che l'integrale $I_l^k[(gz, gz')]$ assuma la forma (3.32).

$$\begin{aligned}
I_l^k[(gz, gz')] &= \int_{\gamma(gz)} (gz, \xi)^{l-k} (\xi, gz')^{-l-k-1} d\mu_{\gamma(gz)}(\xi) \\
&= \int_{g\gamma(z)} (gz, \xi)^{l-k} (\xi, gz')^{-l-k-1} d\mu_{g\gamma(z)}(\xi) \\
&= \int_{g\gamma(z)} (gz, g\xi')^{l-k} (g\xi', gz')^{-l-k-1} d\mu_{g\gamma(z)}(g\xi')
\end{aligned} \tag{3.32}$$

L'invarianza sotto trasformazioni in G di $I_l^k[(z, z')]$ segue allora dall'invarianza del prodotto scalare e della misura $d\mu_\gamma$. \square

In più, oltre alla nuova rappresentazione integrale che l'equazione (3.31) fornisce per le funzioni di Gegenbauer e le funzioni associate di Legendre, possiamo confrontare la forma di (3.31) con quella delle funzioni a due punti di un campo scalare libero (generalizzato) su X_d . Queste, infatti, sono proporzionali esattamente ad una funzione di Gegenbauer del secondo tipo. Notiamo infine che la validità delle equazioni (3.29) e (3.31) rimane tale anche in presenza di valori semi-interi di k . Il ciclo $\gamma(z_v)$ su cui si integra, infatti, non attraversa mai il taglio nello spazio ξ dovuto alla polidromia di $(z_v, \xi)^{(2d+1)/2}$.

Le considerazioni dei paragrafi precedenti ci suggeriscono quindi l'introduzione di una teoria di campo libero (generalizzato) di Anti-de Sitter per mezzo dell'approccio assiomatico di Wightman. Per far ciò necessiteremo della funzione a due punti del campo, che prenderemo della forma (3.33).

$$w(z, z') = c_{l,d} \int_{\gamma(z)} (z, \xi)^l (z', \xi)^{-l-d+1} d\mu_{\gamma(z)}(\xi) \tag{3.33}$$

Da ultimo notiamo come uno dei vantaggi principali che provengono dalla rappresentazione integrale di $I_l^k[(z, z')]$ sia da attribuirsi alla natura geometrica della costruzione di tale rappresentazione. Se, infatti, abbiamo utilizzato la proprietà di embedding di $X_d^{(C)}$ (ovvero abbiamo considerato $X_d^{(C)}$ come una varietà immersa in $\mathbb{C}^{(2, d-1)}$), non abbiamo avuto alcuna necessità di esplicitare una particolare scelta di coordinate. Inoltre, se risulterà possibile identificare $I_l^k[(z, z')]$ con la continuazione analitica in $\mathcal{T}^{\rightleftharpoons} \times \mathcal{T}^{\leftarrow}$ della funzione a due punti di un campo scalare su X_d , come in (3.33), avremo avuto l'occasione di definire lo spazio dei momenti di un campo scalare libero su uno spazio, X_d , su cui non è definita alcuna trasformazione di Fourier nel senso usuale.

3.4 QFT su Anti-de Sitter

Come abbiamo già evidenziato nel capitolo 2, nell'esaminare la formulazione di una teoria quantistica di campo su X_d , e equivalentemente su $X_d^{(C)}$, i campi $\phi(x)$ sono intesi come distribuzioni a valori operatoriali, agenti su un particolare spazio di Hilbert \mathcal{H} , e soddisfacenti la condizione di commutatività $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ se $(x - y)^2 \leq 0$. Si dovrà anche realizzare una rappresentazione unitaria U_g del gruppo di simmetria $G_0 = SO_0(2, d - 1)$ in modo tale che i campi si trasformino in maniera covariante: $U_g \phi(x) U_g^{-1} = \phi(gx)$. Infine sarà necessaria la scelta di un vettore particolare $\Psi_0 \in \mathcal{H}$, lo stato di vuoto, che sia ciclico sotto l'azione dell'algebra polinomiale degli operatori di campo, e invariante sotto l'azione della rappresentazione unitaria U_g di G .

Alternativamente, possiamo caratterizzare completamente una teoria di campo quantistica su X_d tramite l'algebra di Borchers \mathcal{B} delle successioni finite di test-funzioni \mathbf{f} , dove $(\mathbf{f})_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$ è una funzione in $\mathcal{D}(X_d^n)$, ovvero una funzione di classe \mathcal{C}^∞ con supporto compatto su $X_d \times \dots \times X_d$. Tale algebra \mathcal{B} può essere resa una $*$ -algebra purché si convenga di definire un'operazione di involuzione

$\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f}^\dagger$ e un'operazione di prodotto $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \rightarrow \mathbf{f} \otimes \mathbf{g}$ come nel paragrafo 2.4.3.

$$\begin{cases} (\mathbf{f}^\dagger)_n = \overline{f_n(x_n, \dots, x_1)} = \overline{f_n(\overleftarrow{x})} \\ (\mathbf{f} \otimes \mathbf{g})_n = \sum_{p+q=n} f_p \otimes g_q \end{cases} \quad (3.34)$$

Inoltre \mathcal{B} è fornito di una rappresentazione naturale α_g del gruppo di simmetria G , dove l'azione di α è definita da $\alpha_g(\mathbf{f})$ con $[\alpha_g(\mathbf{f})]_n = f_n(g^{-1}x_1, \dots, g^{-1}x_n)$. Come nel caso di QFT sullo spazio piatto, una teoria di campo (locale) scalare sarà allora definita tramite un funzionale lineare positivo W su \mathcal{B} , che sia inoltre G -invariante, ovvero $W(\mathbf{f}) = W(\mathbf{f}_g)$ per ogni $g \in G$, e locale, $W(\mathbf{f}) = 0$ qualora $\mathbf{f} \in \mathcal{I}_{\text{loc}}$.³ Notiamo che la generalizzazione diretta degli assiomi di Wightman corrispondenti alle condizioni appena imposte su W è resa immediata e possibile dalla natura peculiare di X_d di essere uno spazio omogeneo e massimamente simmetrico, con gruppo di simmetria $G = SO(2, d-1)$.

La connessione tra un approccio alla formulazione della QFT e l'altro è data dalla costruzione GNS. Questa infatti, dato un funzionale W che soddisfi su \mathcal{B} le condizioni di positività, covarianza e località, permette di ricostruire uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , una rappresentazione unitaria e regolare U_g di G_0 in \mathcal{H} e un vettore ciclico $\Psi_0 \in \mathcal{H}$, invariante sotto trasformazioni di U_g . Per mezzo della medesima procedura possiamo inoltre costruire una rappresentazione $\mathbf{f} \rightarrow \Phi(\mathbf{f})$ di \mathcal{B} per mezzo di operatori (generalmente non limitati) su \mathcal{H} , in modo che $W(\mathbf{f}) = (\Psi_0, \Phi(\mathbf{f})\Psi_0)$. Questo permette anche di identificare gli operatori di campo $\phi(f)$ con $\Phi(\mathbf{f})$, dove $\mathbf{f} = (0, f, 0, \dots, 0)$, sicché il funzionale W sia dato in termini dei campi $\phi(x)$ come la successione finita di funzioni di Wightman $W \leftrightarrow \{w_n(x_1, \dots, x_n) = (\Psi_0, \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\Psi_0), n \in \mathbb{N}\}$. In questo modo l'algebra di Borchers si identifica, come già evidenziato, con l'algebra tensoriale su $\mathcal{D}(X_d)$, e una teoria quantistica di campo è definita come un funzionale lineare limitato W su \mathcal{B} , ovvero $W = \{w_n \in \mathcal{D}'(X_d)\}$. L'arbitrarietà sulla scelta di w_0 può

³ \mathcal{I}_{loc} è l'ideale di *località* di \mathcal{B} , e viene definito esattamente come nel caso minkowskiano.

essere facilmente eliminata se si sceglie di imporre $w_0 = 1$.

La formulazione di Wightman delle teorie di campo quantistiche su spaziotempo di Anti-de Sitter trova allora il proprio fondamento negli assiomi **AdS1–AdS4**.

AdS1 Le funzioni di Wightman $w_n(x_1, \dots, x_n)$ sono distribuzioni a crescita temperata su $\mathcal{D}(X_d)$.

AdS2 *Covarianza*: ciascuna distribuzione $w_n(x_1, \dots, x_n)$ è invariante sotto l'azione di G , come mostra l'equazione (3.35).

$$(w_n, [\alpha_g(\mathbf{f})]_n) = (w_n, f_n), \quad \forall g \in G \quad (3.35)$$

AdS3 *Località*: qualora x_j e x_{j+1} siano separati da un intervallo spaziale, deve valere l'equazione (3.36).

$$w_n(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = w_n(x_1, \dots, x_{j+1}, x_j, \dots, x_n) \quad (3.36)$$

AdS4 W dev'essere un funzionale positivo, ovvero $W(\mathbf{f}^\dagger \otimes \mathbf{f}) \geq 0$ qualunque sia $\mathbf{f} \in \mathcal{B}$, equazione (3.37).

$$\sum_{n,m=0}^k (W_{n+m}, \overline{f_n} \otimes f_m) \geq 0 \quad (3.37)$$

Notiamo, a questo punto, che la generalizzazione della condizione spettrale non è immediata. Tuttavia, se \mathfrak{M} è un elemento dell'algebra di Lie \mathfrak{G} di G_0 , la mappa esponenziale $\exp(t\mathfrak{M})$ definisce un sottogruppo a un parametro di G_0 . La rappresentazione regolare unitaria U_g di G_0 ci permette allora di associare a \mathfrak{M} un operatore autoaggiunto M su \mathcal{H} a \mathfrak{M} in modo tale per cui $\exp(itM) = U[\exp(t\mathfrak{M})]$, qualunque sia $t \in \mathbb{R}$. Una generalizzazione della condizione spettrale al caso di teorie quantistiche di campo su X_d è allora fornita dalla cosiddetta *condizione spettrale forte*, [7][10][27].

AdS5 *Condizione spettrale forte*: per ogni $\mathfrak{M} \in \mathcal{C}_+$, l'operatore autoaggiunto M su \mathcal{H} ha spettro contenuto in \mathbb{R}_+ .

Una maniera alternativa di enunciare la condizione spettrale forte è data da **AdS5'**.

AdS5' Dati $\mathfrak{M} \in \mathcal{C}_+$, $\Psi \in \mathcal{H}$ e una funzione \mathcal{C}^∞ , $\tilde{\varphi}(p)$, con supporto compatto contenuto in $(-\infty, 0)$, vale (3.38)

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int \tilde{\varphi}(p) e^{-itp} dp \right] U[\exp(t\mathfrak{M})] \Psi dt = 0 \quad (3.38)$$

Se, poi, la condizione di positività risulta valida, la condizione spettrale forte è equivalente alla condizione **AdS5''**.

AdS5'' Dati due interi $m, n \geq 0$, la funzione di Wightman $w_{m+n}(\overleftarrow{z}^{(1)}, z^{(2)})$ è il valore al bordo in senso distribuzionale di una funzione $w(\overleftarrow{z}^{(1)}, z^{(2)})$ a crescita temperata e olomorfa in $\mathcal{T}_m^{\rightarrow} \times \mathcal{T}_n^{\leftarrow}$.

La forma **AdS5''** della condizione spettrale forte ha il vantaggio di essere applicabile anche al caso in cui la positività non risulti valida.

Da ultimo, dovremo generalizzare il postulato circa l'unicità dello stato di vuoto. Questo è immediato grazie alla costruzione GNS, che ci permette di costruire uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , e si traduce in **AdS6**.

AdS6 *Unicità del vuoto*: in \mathcal{H} esiste un unico vettore Ψ_0 invariante sotto l'azione della rappresentazione U_g di G_0 . Equivalentemente possiamo richiedere che l'unico sottospazio di \mathcal{H} invariante sotto l'azione di U_g , qualunque sia $g \in G_0$, sia unidimensionale, ovvero della forma $\mathbb{C}\Psi_0$, $\Psi_0 \in \mathcal{H}$.

Questo, in termini delle funzioni di Wightman, si traduce nel postulato **AdS6'**, [7][10].

AdS6' Se valgono **AdS1-AdS5**, la condizione di unicit  del vuoto   equivalente alla seguente

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[(W, f^\dagger \otimes g_{\exp(t\mathcal{M}_{d(d-1)})}) - (W, f^\dagger) (W, g) \right] dt = 0 \quad (3.39)$$

dove f, g sono elementi qualunque di \mathcal{B} .

3.5 Campo scalare su X_d

L'introduzione di un campo quantistico su X_d pu  avvenire, come abbiamo evidenziato nel paragrafo 3.4, tramite la definizione del funzionale W su \mathcal{B} . Nel caso specifico di un campo scalare libero e neutro si pu  prendere, per convenzione, $w_0 = 1$, e richiedere che $w_n = 0$, se $n > 2$. Per quanto riguarda, invece, $w_2(x_1, x_2)$, vogliamo che valga la condizione spettrale nella forma temperata, per cui $w_2^{(l)}(x_1, x_2) = \text{bv } w_2^{(l)}(z_1, z_2)$, dove bv indica il valore al bordo nel senso delle distribuzioni temperate, intendendo con ci  il limite per z_1, z_2 tendenti ai reali x_1, x_2 sui tuboidi chirali \mathcal{T}^{\mp} . Proponiamo dunque come funzione a due punti $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$ di un campo scalare libero e neutro la funzione (3.33), dove $c_{l,d}$ indica un coefficiente da determinare. Dovremmo dunque essere in grado di dimostrare la validit  delle condizioni di localit , covarianza e positivit  per $w_2(z_1, z_2)$.

Anzitutto, vorremmo calcolare il coefficiente $c_{l,d}$ che lega l'integrale in (3.33) alla funzione a due punti. Data l'assunzione circa $w_2^{(l)}$ abbiamo che questa risulta proporzionale ad una funzione di Gegenbauer, come   mostrato in (3.40).

$$w_2^{(l)}(z_1, z_2) = C_d [(z_1, z_2) - 1]^{-(d-2)/4} Q_{l+(d-2)/2}^{(d-2)/2} [(z_1, z_2)] \quad (3.40)$$

Se la condizione di Hadamard risultasse valida nel caso di $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$ potremmo imporre la condizione di Hadamard locale, richiedendo che il comportamento nel caso di X_d nel limite di punti coincidenti debba essere il medesimo che si incontra

nel caso minkowskiano (*condizione locale di Hadamard*). In tale limite di coincidenza, l'ordine rilevante sarà fornito dalla parte singolare di $Q_{l+(d-2)/2}^{(d-2)/2}[(z_1, z_2)]$ quando $(z_1, z_2) \rightarrow 1$, equazione (3.41).

$$\begin{aligned} C_d D_l^{(d-2)/2}[(z_1, z_2)] &\simeq C_d e^{i\pi(d-2)/2} 2^{(d-2)/4-1} \Gamma[(d-2)/2] [(z_1, z_2) - 1]^{(2-d)/2} \\ &= C_d e^{i\pi(d-2)/2} 2^{(d-2)/4-1} \Gamma[(d-2)/2] \left[-\frac{2}{(z_1 - z_2)^2} \right]^{(d-2)/2} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Il termine dominante per la funzione a due punti di un campo di Klein-Gordon nello spazio di Minkowski sarà invece dato da (3.42).

$$-iD^{(-)}(z_1 - z_2) = \frac{\Gamma(d-2)}{(2i)^{d-2} \pi^{(d-1)/2} \Gamma[(d-1)/2]} \left[-\frac{1}{(z_1 - z_2)^2} \right]^{(d-2)/2} \quad (3.42)$$

Dal momento che a piccole separazioni le distanze nello spazio di Minkowski e in quello di Anti-de Sitter sono asintoticamente le stesse, la funzione a due punti che abbiamo introdotto soddisfa la condizione di Hadamard. Inoltre, il coefficiente C_d può ora essere calcolato imponendo le regole di commutazione canonica o, equivalentemente, uguagliando i coefficienti di (3.41) e di (3.42), in modo da ottenere (3.43).

$$\begin{aligned} C_d &= \frac{(-1)^d}{2^{d-2} \pi^{(d-1)/2} 2^{3(d-2)/4-1}} \frac{\Gamma(d-2)}{\Gamma[(d-2)/2] \Gamma[(d-1)/2]} \\ &= \frac{(-1)^d}{2^{3(d-2)/4} \pi^{d/2}} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Abbiamo dunque la seguente rappresentazione per la funzione a due punti proposta in precedenza per il campo di Klein-Gordon su X_d ,

$$w_2^{(l)}(z_1, z_2) = c_{l,d} \int_{\gamma(z)} (z_1, \xi)^l (z_2, \xi)^{-l-d+1} d\mu_{\gamma(z_1)}(\xi) \quad (3.44)$$

dove $c_{l,d}$ è dato da (3.45).

$$c_{l,d} = \frac{(-1)^{d+1}}{2^{(5d-6)/4}\pi^{d-1}} \frac{\Gamma(l+d-1)}{\Gamma(l+1)} \quad (3.45)$$

A questo punto possiamo dedicarci a verificare la validità degli assiomi di Wightan nel caso della funzione a due punti proposta $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$.

Covarianza

Dal momento che $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$ è definita, per ipotesi, su $\mathcal{T}^{\leftarrow} \times \mathcal{T}^{\rightarrow}$, e risulta proporzionale all'integrale $I_l^k[(z_1, z_2)]$ per $l \rightarrow l+k$ e $k = (d-2)/2$, la covarianza di $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$ è garantita dalla proposizione 16.

Località

Con un procedimento analogo a quello utilizzato nella sezione 3.3 è possibile mostrare come le funzioni $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$ e $\hat{w}_2^{(l)}(z_1, z_2) = \left[w_2^{(l)}(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \right]^*$ siano proporzionali ad una funzione di Gegenbauer del secondo tipo. In particolare si ha che $W_2^{(l)}(-\cosh v) = \left[w_2^{(l)}(z_1(v), z_2) \right]^* = \hat{w}_2^{(l)}(\bar{z}_1(v), \bar{z}_2)$. Siccome i punti $x_1(v)$ e x_2 nella regione di località appartengono alla stessa orbita di $(z_1(v), z_2)$ e di $(\bar{z}_1(v), \bar{z}_2)$ del gruppo $G^{(C)}$ la proprietà di località risulta valida in virtù della proprietà di covarianza già dimostrata.

Condizione spettrale

In virtù della proposizione 15 l'integrale in $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$ definisce una funzione olo-morfa su $\mathcal{T}^{\leftarrow} \times \text{cl } \mathcal{T}^{\rightarrow} \subset X_d^{(C)} \times X_d^{(C)}$, dal momento che $(\xi, z_2)^{-l-d+1}$ non diviene mai singolare se $\xi \in \gamma(z_1)$ e $(z_1, z_2) \in \mathcal{T}^{\leftarrow} \times \text{cl } \mathcal{T}^{\rightarrow}$. Inoltre $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$ è a crescita moderata se z_1 e z_2 tendono ai reali dal dominio $\mathcal{T}^{\leftarrow} \times \mathcal{T}^{\rightarrow}$, e per questo motivo $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$ ammette un valore al bordo $w_2^{(l)}(x_1, x_2)$ nel senso delle distribuzioni

temperate quando $\mathcal{T}^{\leftrightarrow} \times \mathcal{T}^{\leftrightarrow} \ni (z_1, z_2) \rightarrow (x_1, x_2) \in X_d \times X_d$.

$$w_2^{(l)}(x_1, x_2) = \text{bv } w_2(z_1, z_2) = \lim_{\substack{z_1 \rightarrow x_1, z_1 \in \mathcal{T}^{\leftrightarrow} \\ z_2 \rightarrow x_2, z_2 \in \mathcal{T}^{\leftrightarrow}}} w_2(z_1, z_2) \quad (3.46)$$

Notiamo che, inoltre, la funzione a due punti $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$ può essere continuata analiticamente ad una funzione olomorfa sull'insieme $\Delta = \{z_1, z_2 \in X_d^{(C)} \times X_d^{(C)} : (z_1, z_2) \in \Theta_\chi = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]\}$. Infine, la proprietà di covarianza soddisfatta da $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$ e la condizione spettrale implicano assieme che $w_2^{(l)}$ è una funzione $W_2^{(l)}[(z_1, z_2)]$ della quantità invariante (z_1, z_2) , olomorfa in Θ_χ .

Positività

Per verificare la proprietà di positività per la funzione a due punti $w_2^{(l)}$ dovremo dimostrare la disuguaglianza seguente, (3.47).

$$\int_{X_d \times X_d} \text{bv } W(z_1, z_2) \overline{f(x_1)} f(x_2) d\sigma(x_1) d\sigma(x_2) \geq 0 \quad (3.47)$$

Dal momento che (3.33) non è manifestamente positiva, nel senso delle distribuzioni, proviamo ad esprimere $(z, \xi)^l$ in una maniera differente.

Consideriamo dunque la funzione $\mathcal{K}(z, \xi)$ in (3.48).

$$\mathcal{K}(z, \xi) = \int_{\gamma(\xi)} (\xi, \xi')^l (z, \xi')^{-l-d+1} d\mu_{\gamma(z)}(\xi') \quad (3.48)$$

In virtù del teorema di Stokes e della proposizione 13, dato un qualunque ciclo $\gamma'(\xi)$ che appartenga alla stessa classe di omologia relativa $H^1(C^{(c)}, \{\xi' : (\xi', \xi) = 0\})$ di $\gamma(\xi)$, l'equazione risulta valida (3.49).

$$\int_{\gamma'(\xi)} (\xi, \xi'')^l (z, \xi'')^{-l-d+1} d\mu_{\gamma(\xi)}(\xi'') = \int_{\gamma(\xi)} (\xi, \xi')^l (z, \xi')^{-l-d+1} d\mu_{\gamma(\xi)}(\xi') \quad (3.49)$$

Inoltre, l'integrale in (3.48) è invariante sotto le trasformazioni g di G . Infatti

$(\xi, g^{-1}\xi') = (g^{-1}g\xi, g^{-1}\xi') = (g\xi, \xi')$, dato qualunque ξ , e la conclusione segue immediatamente da considerazioni completamente analoghe a quelle necessarie per dimostrare la covarianza di $w_2^{(l)}(z, z')$. Tale proprietà di invarianza sotto l'azione di G soddisfatta da (3.48), assieme all'analiticità e all'omogeneità assicura l'uguaglianza di (3.48) con il kernel $(z, \xi)^l$, a meno di un fattore costante.

Così, al fine di calcolare il coefficiente che lega $(z, \xi)^l$ a (3.48) dovremo scegliere una configurazione appropriata $(\xi, z) \in C_{\rightleftharpoons} \times \mathcal{T}^{\leftarrow}$. Denoteremo con b' il punto $b' = (1, \mathbf{0}_{d-1}, 0)$ e con $G_{b'}$ lo stabilizzatore di b' in G . Dal momento che z giace in \mathcal{T}^{\leftarrow} , può essere visto come il risultato dell'azione di un qualche $g \in G$ su $(\pm i \sinh v, \mathbf{0}_{d-1}, \cosh v)$, dove $v > 0$. Prenderemo allora z come un punto nella chiusura dell'insieme generato da $R(\hat{\mathbf{r}}_z)\Lambda^{(d,d-1)}(\alpha)z_v$, dove z_v è un generico punto di h_{\rightleftharpoons} , $\Lambda^{(d,d-1)}(\alpha) \in G_{b'}$ è il boost di Lorentz agente tra la d -sima componente di z_v e la $(d-1)$ -sima e infine $R(\hat{\mathbf{r}}_z) \in G_b \cap G_{b'}$ è la rotazione che mappa $(0, \dots, 0, 1, 0)$ in $(0, \hat{\mathbf{r}}_z, 0)$, dove $\mathbb{R}^{d-2} \ni \hat{\mathbf{r}}_z : \hat{\mathbf{r}}_z^2 = 1$.

$$z = R(\hat{\mathbf{r}}_z)\Lambda^{(d,d-1)}(\alpha)z_v = [\pm i \sinh(v), \cosh(\alpha) \cosh(v)\hat{\mathbf{r}}_z, \sinh(\alpha) \cosh(v)] \quad (3.50)$$

D'altra parte prenderemo come ξ un punto di $\gamma_{\rightleftharpoons}^{(0)}$, e, come tale, sarà della forma $\xi = [\sin \Psi, \hat{\mathbf{r}}_\xi, \cos \Psi] = [\sin(\psi \pm i\chi), \hat{\mathbf{r}}_\xi, \cos(\psi \pm i\chi)]$ dove $\mathbb{R}^{d-2} \ni \hat{\mathbf{r}}_\xi : \hat{\mathbf{r}}_\xi^2 = 1$.

Infine, $\xi' \in H^1(C^{(c)}, \{\xi' : (\xi', \xi) = 0\})$. Scegliremo, in particolare, di porre $\xi' \in \gamma_{\rightleftharpoons}^{(0)}$ se $\xi \in C_{\rightleftharpoons}$, in modo che ξ' assuma la forma $\xi' = [\sin(\phi \pm i\varphi), \hat{\mathbf{r}}_{\xi'}, \cos(\phi \pm i\varphi)]$. Tramite questa scelta abbiamo $(\xi, \xi') = \cos[(\psi - \phi) \pm i(\chi - \varphi)] - \hat{\mathbf{r}}_\xi \cdot \hat{\mathbf{r}}_{\xi'}$. Inoltre, dal momento che siamo completamente liberi di scegliere $\hat{\mathbf{r}}_{\xi'} \in \mathbb{S}^{(d-2)}$, lo prenderemo eguale a $\hat{\mathbf{r}}_\xi$. In questo modo avremo $(\xi, \xi') = \cos[(\psi - \phi) \pm i(\chi - \varphi)] - 1$, e questo sarà nullo se e solo se $\chi = \varphi$ e $\psi - \phi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Tali considerazioni ci conducono naturalmente a definire il ciclo $\gamma(\xi)$ come la mappa $q \rightarrow \Psi = \phi + q + i\varphi$, con q appartenente all'intervallo $[0, 2\pi]$. Pertanto calcoleremo l'integrale in (3.48)

con le seguenti scelte per la configurazione particolare $(\xi, z, \gamma(\xi))$.

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \lim_{\alpha, v \rightarrow 0^+} [\pm i \sinh(v), \cosh(\alpha) \cosh(v) \hat{\mathbf{r}}_\xi, \sinh(\alpha) \cosh(v)] \\ \xi = [\sin(\phi \pm i\varphi), \hat{\mathbf{r}}_\xi, \cos(\phi \pm i\varphi)] \\ \gamma(\xi) = \{\xi' : \xi' = [\sin(\phi + q \pm i\varphi), \hat{\mathbf{r}}_\xi, \cos(\phi + q \pm i\varphi)], q \in [0, 2\pi]\} \end{array} \right. \quad (3.51)$$

Il risultato del calcolo è mostrato in (3.52), che vale qualunque sia $l > -1/2$, e pertanto risulta essere soddisfacente, dal momento che prendiamo $l \geq 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z, \xi) &= \int_{\gamma(\xi)} (\xi, \xi')^l (z, \xi')^{-l-d+1} d\mu_{\gamma(\xi)}(\xi') \\ &= -\frac{S_{d-1}}{2} \int_0^{2\pi} (\cos q - 1)^l (-1)^{-l-d+1} dq \\ &= -\frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma[(d-1)/2]} \frac{(-1)^{d+1} 2^{l+1} \sqrt{\pi} \Gamma(l+1/2)}{\Gamma(l+1)} \\ &= (-1)^d 2^{l+1} \pi^{d/2} \frac{\Gamma(l+1/2)}{\Gamma[(d-1)/2] \Gamma(l+1)} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Da ultimo, dal momento che possiamo vedere, a partire dall'equazione (3.51), che $(z, \xi) = -1$, abbiamo la seguente forma per la funzione a due punti $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$, equazione (3.33)

$$W(z_1, z_2) = \tilde{c}_{l,d} \int_{\gamma(z_1)} \int_{\gamma(\xi)} (z_1, \xi')^{-l-d+1} (\xi', \xi)^l (\xi, z_2)^{-l-d+1} d\mu_{\gamma(\xi)}(\xi') d\mu_{\gamma(z)}(\xi) \quad (3.53)$$

dove il coefficiente $\tilde{c}_{l,d}$ di (3.53) è fornito dall'equazione (3.54).

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{l,d} &= \frac{(-1)^{d+l} 2^{l+1} \pi^{d/2} \Gamma(l+1/2) 2^{(5d-6)/4} \pi^{d-1} \Gamma(l+1)}{\Gamma[(d-1)/2] \Gamma(l+1) (-1)^{d+1} \Gamma(l+d-1)} \\ &= (-1)^{l+1} \frac{2^{(5d+4l-2)/4} \pi^{(3d-2)/2} \Gamma(l+1/2)}{\Gamma(l+d-1) \Gamma[(d-1)/2]} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Ora, tornando alla positività del funzionale $w_2^{(l)}$, possiamo verificare che, data

una qualunque test-funzione $f \in \mathcal{D}(X_d)$, l'equazione (3.55) risulta valida.

$$\begin{aligned} (w_2^{(l)}, \bar{f} \otimes f) &= \int_{X_d \times X_d} \overline{f(x_1)} \text{bv } w_2^{(l)}(z_1, z_2) f(x_2) d\sigma(x_1) d\sigma(x_2) \\ &= \tilde{c}_{l,d} \int_{X_d \times X_d} \text{bv} \int_{\gamma(z_1)} \int_{\gamma(\xi)} \overline{f(x_1)} (z_1, \xi')^{-l-d+1} (\xi', \xi)^l \cdot \\ &\quad \cdot (\xi, z_2)^{-l-d+1} d\mu_{\gamma(\xi)}(\xi') d\mu_{\gamma(z_1)}(\xi) d\sigma(x_1) d\sigma(x_2) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Inoltre, dal momento che $\mathcal{T}^{\rightleftharpoons}$ è generato dall'azione di G su h_{\rightleftharpoons} (proposizione 10), possiamo pensare a z_1 come all'azione di $g \in G$ su un determinato $z_v \in h_{\rightleftharpoons}$, se $z_1 \in \mathcal{T}^{\rightleftharpoons}$. Così vediamo che $g\gamma(z_v)$ è un ciclo ammissibile nella classe di omologia relativa $H^1(C^{(e)}, \{\xi : (z_1, \xi) = 0\})$, dove $\gamma(z_v)$ è il ciclo definito nella sezione 3.3. Siccome possiamo sempre scegliere $\gamma(z_v) = \{\xi_v\}$ in modo tale da rendere (ξ_v, z_v) reale, e dal momento che $(\xi, z_1) = (g\xi_v, gz_v) = (\xi_v, z_v)$, possiamo assumere che anche (ξ, z_1) sia reale. Procedendo oltre con queste considerazioni, possiamo assumere che (ξ, ξ') e (z_1, ξ') siano reali. Tali osservazioni ci conducono a riscrivere (3.55) nella forma (3.56).

$$\begin{aligned} (w_2^{(l)}, \bar{f} \otimes f) &= \tilde{c}_{l,d} \int_{X_d \times X_d} \text{bv}_{\substack{z_1 \rightarrow x_1 \\ z_2 \rightarrow x_2}} \int_{\gamma(z_1)} \int_{\gamma(\xi)} \left[\overline{f(x_1)} (z_1, \xi')^{-l-d+1} \right] (\xi', \xi)^l \cdot \\ &\quad \cdot \left[(\xi, z_2)^{-l-d+1} f(x_2) \right] d\mu_{\gamma(\xi)}(\xi') d\mu_{\gamma(z_1)}(\xi) d\sigma(x_1) d\sigma(x_2) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Ora non possiamo semplicemente portare il valore al bordo (distribuzionale) sotto il segno di integrale, dal momento che tanto $\gamma(\xi)$ quanto $\gamma(z_1)$ dipende su z_1 . Tuttavia, sapendo che possiamo assumere (z_1, ξ') che sia reale, possiamo procedere e semplificare la formula per $(w_2^{(l)}, \bar{f} \otimes f)$. Infatti, se $z_1 = x_1 + iy_1$ se $\xi' = \xi'_x + i\xi'_y$ abbiamo $(z, x') = (x_1, \xi'_x) - (y_1, \xi'_y)$. Pertanto potremo scrivere la relazione (3.57).

$$(z_1, \xi')^{-l-d+1} = (x_1, \xi'_x)^{-l-d+1} \left(1 - \frac{(y_1, \xi'_y)}{(x_1, \xi'_x)} \right)^{-l-d+1} \quad (3.57)$$

Dal momento che $|(y_1, \xi'_y) / (x_1, \xi'_x)| < 1$ possiamo espandere il termine tra parentesi nell'equazione (3.57) in serie di potenze. Così vediamo che unicamente il

termine di ordine zero nell'espansione porta un contributo non nullo quando si effettua l'integrazione e si prende il limite per $y_1 \rightarrow 0$. Così, scegliendo, senza perdita di generalità, $z_1 = z_v$ possiamo notare come (x_1, ξ'_x) sia il risultato del portare il valore al bordo $z_1 \rightarrow x_1$ da \mathcal{T}^{\leftarrow} sotto il segno di integrale, e corrispondentemente prendendo il limite $\gamma(z_1) \rightarrow \gamma(x_1)$. Dal momento che la misura $d\mu_{\gamma(z_1)}(\xi)$ non è intaccata da tale operazione, possiamo concludere che sia possibile portare $bv_{z_1 \rightarrow x_1}$ sotto il segno di integrale, a patto di prendere contemporaneamente il limite per z_1 tendendo ai reali all'interno del suo tuboide di definizione e per il ciclo di integrazione $\gamma(z_1)$ tendente a $\gamma(x_1)$.

Possiamo allora integrare su $X_d \times X_d$, data la configurazione $(z_1, z_2) \in \mathcal{T}^{\leftarrow} \times \mathcal{T}^{\leftarrow}$, e ottenere il risultato mostrato nell'equazione (3.58).

$$\left(w_2^{(l)}, \bar{f} \otimes f\right) = \tilde{c}_{l,d} \int_{\gamma(x_1)} \int_{\gamma(\xi)} \overline{\tilde{f}_l(\xi')} (\xi', \xi)^l \tilde{f}_l(\xi) d\mu_{\gamma(\xi)}(\xi') d\mu_{\gamma(x_1)}(\xi) \quad (3.58)$$

In un certo senso, possiamo notare come il nucleo $(z, \xi)^{-l-d+1}$ induca naturalmente una trasformazione (3.59) di tipo Fourier su $\mathcal{D}(X_d)$ in modo che, se $f \in \mathcal{D}(X_d)$ sarà mappata in \tilde{f}_l^{\leftarrow} , definita su C_{\leftarrow} . Possiamo allora identificare le funzioni $\tilde{f}_l(\xi)$ con il “valore al bordo” di $\tilde{f}_l^{\leftarrow}(\xi)$ per ξ tendente a $\xi_x \in C$ da C_{\leftarrow} .

$$\tilde{f}_l^{\leftarrow}(\xi) = \int_{X_d} (x, \xi)^{-l-d+1} f(x) d\sigma(x), \quad \xi \in C_{\leftarrow} \quad (3.59)$$

Osservando l'equazione (3.58) possiamo ora interpretare il nucleo $(\xi', \xi)^l$ come l'azione a sinistra di un operatore K_l su $\tilde{f}_l(\xi')$. In questo modo, se $f(\xi)$ è una funzione analitica definita su C , ci aspettiamo che K_l mappi f in una funzione $g(\xi')$ a sua volta definita su C .

$$g(\xi') = \int_{\gamma(\xi')} f(\xi) (\xi, \xi')^l d\mu_{\gamma(\xi')}(\xi) \quad (3.60)$$

Possiamo quindi notare, al fine di semplificare i calcoli seguenti, che una formula

simile a quella ricavata nell'equazione (3.29), o in (3.31), sussista anche se scegliamo il ciclo $\gamma(z)$ nella classe di omologia relativa $H^1(C^{(c)}, \{\xi : (\xi, z) = 1\})$. Ora tuttavia, se scegliamo $z = z_v$ il ciclo sarà $\gamma'(z) : \phi \rightarrow \Psi = \phi + iv$, dove ϕ assume i valori in $[0, 2\pi]$. Dimostreremo, in effetti, che l'integrale \mathcal{I}_l^k dell'equazione (3.61) e I_l^k di (3.28) sono proporzionali.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_l^k(z, z') &= \int_{\gamma'(z)} (z, \xi)^{l-k} (z', \xi)^{-l-k-1} d\mu_{\gamma'(z)}(\xi) \\
&= -\frac{S_{d-2}}{2} \int_0^{2\pi} \cos^{-2k-1} \phi [\cosh v - i \tan \phi \sinh v]^{-l-k-1} d\phi \\
&= -\frac{S_{d-2}}{2} \left[\int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \right] (1 + \tan^2 \phi)^{k+1/2} [\cosh v - i \tan \phi \sinh v]^{-l-k-1} d\phi \\
&= -\frac{S_{d-2}}{2} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \right] (1 + \tan^2 \phi)^{k+1/2} [\cosh v - i \tan \phi \sinh v]^{-l-k-1} d\phi \\
&= S_{d-2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+t^2)^{k+1/2} \frac{[\cosh v - it \sinh v]^{-l-k-1}}{1+t^2} dt \\
&= 2I_l^k(z, z')
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Siccome tutta la discussione che segue le equazioni (3.28)-(3.31) rimane valida anche se $\gamma'(z) \in H^1(C^{(c)}, \{\xi : (\xi, z) = 1\})$, l'osservazione precedente ci consente di riscrivere l'equazione (3.58) nella forma (3.62), dove $\gamma'(z)$ è il ciclo che abbiamo appena definito nella nuova omologia relativa.

$$(w_2^{(l)}, \bar{f} \otimes f) = \frac{\tilde{c}_{l,d}}{2} \int_{\gamma'(x_1)} \int_{\gamma(\xi)} \overline{\tilde{f}_l(\xi')} (\xi', \xi)^l \tilde{f}_l(\xi) d\mu_{\gamma(\xi)}(\xi') d\mu_{\gamma'(x_1)}(\xi) \tag{3.62}$$

Ora $\gamma'(x_1)$ e $\gamma(\xi)$ sono entrambi cicli chiusi in C , e effettivamente sono omotopi. Il fatto che l'integrando dell'equazione (3.62) non dipenda in alcun modo dalla scelta di x_1 implica che gli integrali possono essere calcolati su qualunque ciclo che sia omotopo a $\gamma'(x_1)$, che è la sezione del cono $C = \{\xi : \xi = [\xi^0, \boldsymbol{\xi}, \xi^d] \in \mathbb{R}^{d+1}, \xi^2 = 0\}$ determinata da $\boldsymbol{\xi} = \hat{\mathbf{r}}_\xi$. Se $\hat{\boldsymbol{\xi}} = [\xi^0, \xi^d]$ e se scegliamo $\gamma(\xi)$ in modo che $\hat{\mathbf{r}}_\xi \cdot \hat{\mathbf{r}}'_\xi = 1$, abbiamo che $(\xi, \xi')^l = (-1)^l (1 - \hat{\boldsymbol{\xi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}')$. Ora $(-1)^l \tilde{c}_{l,d}/2 \geq 0$, sicché dobbiamo

unicamente studiare la positività degli integrali in (3.62). Per far ciò dobbiamo anzitutto studiare la positività del kernel $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}')$, nell'equazione (3.63).

$$\begin{aligned}
& \int_{\gamma'(x_1)} \int_{\gamma(\xi)} \overline{\tilde{f}_l(\xi')} (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}') \tilde{f}_l(\xi) d\mu_{\gamma(\xi)}(\xi') d\mu_{\gamma'(x_1)}(\xi) \\
&= \int_{\gamma'(x_1)} \overline{\tilde{f}_l(\xi')} \boldsymbol{\xi}' d\mu_{\gamma(\xi)}(\xi') \int_{\gamma(\xi)} \tilde{f}_l(\xi) \boldsymbol{\xi} d\mu_{\gamma'(x_1)}(\xi) \\
&= \left| \int_{\gamma(\xi)} \tilde{f}_l(\xi) \boldsymbol{\xi} d\mu_{\gamma'(x_1)}(\xi) \right|^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Dal momento che $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}')$ è un nucleo semidefinito positivo, anche $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}')^m$ lo è, [19]. Abbiamo infatti la proposizione 17.

Proposizione 17. *Sia \mathcal{M} una varietà regolare. Siano inoltre $A(x_1, x_2)$ e $B(x_1, x_2)$ due funzioni di classe C^∞ con supporto compatto su $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, e μ una misura positiva su \mathcal{M} . Se $A(x_1, x_2)$ e $B(x_1, x_2)$ definiscono due nuclei integrali di operatori \mathbf{A} e \mathbf{B} che siano semidefiniti positivi, ovvero*

$$\int_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \overline{f(x_1)} A(x_1, x_2) f(x_2) d\mu(x_1) d\mu(x_2) \geq 0 \tag{3.64}$$

qualunque sia $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, e similmente per \mathbf{B} , allora anche l'operatore \mathbf{C} di nucleo integrale $C(x_1, x_2) = A(x_1, x_2)B(x_1, x_2)$ è semidefinito positivo.

Dimostrazione. Dal momento che $A(x_1, x_2)$ e $B(x_1, x_2)$ sono funzioni regolari e a supporto compatto su \mathcal{M} , gli operatori \mathbf{A} e \mathbf{B} sono operatori di Hilbert-Schmidt su $L^2(\mathcal{M}, \mu)$. Siccome gli operatori di Hilbert-Schmidt sono compatti, il teorema di Hilbert-Schmidt ci permette di rappresentare i nuclei integrali di \mathbf{A} e \mathbf{B} come in (3.65), dove $a_n, b_n \geq 0$ e le autofunzioni $\phi_n(x)$ e $\psi_n(x)$ sono regolari e a supporto compatto.

$$\begin{cases} A(x_1, x_2) = \sum_n a_n \overline{\phi_n(x_1)} \phi_n(x_2) \\ B(x_1, x_2) = \sum_n b_n \overline{\psi_n(x_1)} \psi_n(x_2) \end{cases} \tag{3.65}$$

Ora, se definiamo $A_N(x_1, x_2)$ e $B_N(x_1, x_2)$ come le espansioni (3.65) troncate al

termine N -simo, abbiamo che

$$\begin{cases} (f, \mathbf{A}_N f) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (f, \mathbf{A} f) \\ (f, \mathbf{B}_N f) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (f, \mathbf{B} f) \end{cases} \quad (3.66)$$

qualunque sia $f(x)$. Dunque, introducendo $C_N(x_1, x_2) = A_N(x_1, x_2)B_N(x_1, x_2)$, abbiamo anche che $(f, C_N f)$ tende a $(f, C f)$ nel limite $N \rightarrow \infty$. Tuttavia

$$\begin{aligned} (f, C_N f) &= \int_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \overline{f(x_1)} C_N(x_1, x_2) f(x_2) d\mu(x_1) d\mu(x_2) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n b_m \left| \int_{\mathcal{M}} f(x) \phi_n(x) \psi_m(x) \right|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

e la conclusione segue immediatamente. \square

Infine possiamo concentrare la nostra attenzione sull'eventuale proprietà di positività del nucleo in (3.62). Otteniamo

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma'(x_1)} \int_{\gamma(\xi)} \overline{\tilde{f}_l(\xi')} (1 - (\xi, \xi'))^l \tilde{f}_l(\xi) d\mu_{\gamma(\xi)}(\xi') d\mu_{\gamma'(x_1)}(\xi) \\ &= \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \int_{\gamma'(x_1)} \int_{\gamma(\xi)} \overline{\tilde{f}_l(\xi')} (\xi, \xi')^m \tilde{f}_l(\xi) d\mu_{\gamma(\xi)}(\xi') d\mu_{\gamma'(x_1)}(\xi) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

L'equazione (3.68) assicura la positività del funzionale $w_2^{(l)}$, e, considerando che $(x, \xi)^l$ è una soluzione dell'equazione di Klein-Gordon con massa $m^2 = l(l+d-1)$, la distribuzione $w_2^{(l)}(x_1, x_2)$ è a sua volta soluzione, in ambo le variabili, di un'equazione di Klein-Gordon di medesima massa. Questo completa la dimostrazione del teorema seguente.

Teorema 9. *Dato qualunque $l \in \mathbb{N}$ esiste un campo scalare generalizzato di Anti-de Sitter, che sia soluzione all'equazione di Klein-Gordon con massa $m^2 = l(l+d-1)$. Le sue uniche funzioni di Wightman non nulle sono $w_0^{(l)} = 1$ e $w_2^{(l)}(x_1, x_2)$. La funzione a due punti $w_2^{(l)}(x_1, x_2)$ è il valore al bordo in senso distribuzionale di*

una funzione olomorfa $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$ definita su $\mathcal{T}^{\rightleftharpoons} \subset X_d^{(C)}$, la cui forma è data dall'equazione (3.33), e che risulta essere una soluzione, di nuovo nel senso delle distribuzioni, dell'equazione di Klein-Gordon su $X_d^{(C)}$ in entrambe le variabili. Il funzionale $W = \{w_n^{(l)}(x_1, \dots, x_n)\}$ soddisfa i postulati **AdS1-AdS6**.

3.6 Trasformazione di Fourier su X_d

L'analisi dell'azione di $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$ sulle test funzioni di $\mathcal{D}(X_d)$ e lo studio della sua proprietà di positività ci ha portato all'introduzione una trasformazione su $\mathcal{D}(X_d)$. Nell'equazione (3.59) l'abbiamo definita una trasformazione di tipo "Fourier", che associa ad ogni funzione $f(x) \in \mathcal{D}(X_d)$ due successione di funzioni olomorfe $\tilde{f}_l^{\rightleftharpoons}(\xi)$, definite su C_{\rightleftharpoons} . È interessante osservare come questa trasformazione di Fourier $\mathcal{F}^{\rightleftharpoons}[f] = \{\mathcal{F}_l^{\rightleftharpoons}[f]\} = \{\tilde{f}_l^{\rightleftharpoons}\}$, definita in (3.59), condivide alcune importanti proprietà con la vera e propria trasformazione di Fourier su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Alcune di queste sono enunciate nel seguito. Anzitutto, tuttavia, dimostreremo un'utile proprietà soddisfatta dal nucleo integrale della trasformazione.

Proposizione 18. *Fintanto che $x \in X_d$ e $\xi \in C_{\rightleftharpoons}$, il kernel $(x, \xi)^{-l-d+1}$ della trasformazione di Fourier non diviene mai singolare.*

Dimostrazione. Dal momento che $l \geq 0$ e $d \geq 2$, dobbiamo unicamente dimostrare che (x, ξ) non è mai nullo se $\xi \in C_{\rightleftharpoons}$ e $x \in X_d$. Inoltre, dal momento che X_d è invariante sotto l'azione di G possiamo limitarci a studiare quei vettori ξ di C_{\rightleftharpoons} che giacciono in $\gamma_{\rightleftharpoons}^{(0)}$. Utilizzeremo le seguenti parametrizzazioni (3.69). In ciò che segue restringeremo l'attenzione, senza perdita di generalità, al caso $\xi \in \gamma_{\rightleftharpoons}^{(0)}$.

$$\begin{cases} x &= [\cosh \psi \sin \varphi, \sinh \psi \hat{\mathbf{r}}_x, \cosh \psi \cos \varphi] \\ \xi &= [\sin(u + iv), \hat{\mathbf{r}}_\xi, \cos(u + iv)] \end{cases} \quad (3.69)$$

Allora $(x, \xi) = \cosh \psi \cos(\varphi - u - iv) - \sinh \psi \hat{\mathbf{r}}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}_\xi$. Utilizzeremo la notazione $\hat{\mathbf{r}}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}_\xi = \cos \gamma$, in modo che possiamo scrivere l'espressione per il prodotto scalare

mostrata in (3.70).

$$(x, \xi) = \cosh \psi [\cos(\varphi - u) \cosh v + i \sin(\varphi - u) \sinh v] - \cos \gamma \sinh \psi \quad (3.70)$$

Vediamo allora che (x, ξ) assume i suoi valori su un'ellisse parametrizzata da $(\varphi - u)$ nel piano complesso. La distanza tra il centro dell'ellisse e uno qualunque dei fuochi è pari a $f = \sqrt{\cosh^2 \psi (\cosh^2 v - \sinh^2 v)} = \cosh \psi$ e il centro dell'ellisse giace sull'asse reale nel punto $x_C = -\cos \gamma \sinh \psi$. L'asse maggiore dell'ellisse risulta inoltre essere pari a $2a = 2 \cosh v \cosh \psi$ e le distanze tra l'origine degli assi e i fuochi sono $OF_1 = |x_C + f|$, $OF_2 = |x_C - f|$. Si può verificare che l'ellisse racchiude sempre l'origine. Supponiamo allora che O giaccia all'esterno di tale ellisse. Dovremmo verificare che ciò genera un assurdo nelle quattro differenti configurazioni corrispondenti a $x_C \leq 0$ e $x_C \geq 0$. Mostriamo che l'ipotesi non è valida unicamente nel caso in cui $x_C < 0$ e $\cos \gamma > 0$, mentre $\sinh \psi > 0$. In questo caso $OF_1 + OF_2 = -2x_C$, e questo implica $OF_1 + OF_2 = 2 \cos \gamma \sinh \psi < 2 \cosh \psi \leq 2 \cosh \psi \cosh v = 2a$. Ma allora l'ellisse dovrebbe racchiudere l'origine, e questo è impossibile dal momento che abbiamo assunto che questo non fosse il caso. La conclusione segue. \square

Passiamo ora a dimostrare alcune proprietà della trasformazione di Fourier su $\mathcal{D}(X_d)$, affini a quelle soddisfatte dalla trasformazione usuale in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Proposizione 19. *Se $f \in \mathcal{D}(X_d)$, le funzioni che compongono le trasformate di Fourier $\mathcal{F}^{\rightleftharpoons}[f]$ sono limitate.*

Dimostrazione. Per dimostrare la proposizione consideriamo il modulo di $\tilde{f}_l^{\rightleftharpoons}(\xi)$.

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_l^{\rightleftharpoons}(\xi)| &= \left| \int_{X_d} f(x) (x, \xi)^{-l-d+1} d\sigma(x) \right| \\ &\leq \int_{X_d} |f(x) (x, \xi)^{-l-d+1}| d\sigma(x) \\ &= \int_{X_d} |f(x)| (x, \xi)^{-l-d+1} d\sigma(x) \end{aligned} \quad (3.71)$$

In virtù del risultato della proposizione 18 e del fatto che $f(x)$ sia una funzione in $\mathcal{D}(X_d)$ possiamo proseguire come nell'equazione (3.72). Se, infatti, $\text{supp } f \subseteq D \subset X_d$, con D compatto, e $\mathbf{1}_D$ è la funzione indicatrice di D , abbiamo

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_l^{\Leftarrow}(\xi)| &\leq \int_{X_d} \mathbf{1}_D(x) |f(x)| (x, \xi)^{-l-d+1} |d\sigma(x) \\ &\leq M \int_{X_d} |f(x)| d\sigma(x) \end{aligned} \quad (3.72)$$

La trasformata di Fourier risulta dunque limitata poiché

$$\int_{X_d} |f(x)| d\sigma(x) < +\infty \quad (3.73)$$

□

Proposizione 20. *Sia $f(x)$ una funzione su X_d , tale per cui l'integrale (3.59) sia ben definito, e v un vettore dello spazio tangente $T_\xi C^{\Leftarrow}$. Supponiamo che l'integrale (3.59) sia ben definito anche per la funzione $(x, v) f(x)$. La trasformata \tilde{f}_l^{\Leftarrow} è una funzione olomorfa su C^{\Leftarrow} , e la sua derivata lungo v soddisfa la proprietà seguente.*

$$D_v \tilde{f}_l^{\Leftarrow}(\xi) = \left(d\tilde{f}_l^{\Leftarrow}, v \right) = (-l - d + 1) \mathcal{F}_{l+1}^{\Leftarrow}[(x, v) f(x)] \quad (3.74)$$

Dimostrazione. La trasformata di Fourier è olomorfa in virtù della proposizione 18 e dell'analiticità del prodotto scalare (x, ξ) . Prendiamo ora un reale t e calcoliamo la derivata della funzione (a priori complessa) $\tilde{f}_l^{\Leftarrow}(\xi)$ lungo la direzione di v .

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{f}_l^{\Leftarrow}(\xi + tv) - \tilde{f}_l^{\Leftarrow}(\xi)}{t} &= \frac{1}{t} \int_{X_d} f(x) \left[(\xi + tv, x)^{-l-d+1} - (\xi, x)^{-l-d+1} \right] d\sigma(x) \\ &= \frac{1}{t} \int_{X_d} f(x) (x, \xi)^{-l-d+1} \left[\left(1 + \frac{(tv, x)}{(\xi, x)} \right)^{-l-d+1} - 1 \right] d\sigma(x) \\ &= (-l - d + 1) \int_{X_d} [f(x) (x, v)] (x, \xi)^{-l-d} d\sigma(x) + O(t) \end{aligned} \quad (3.75)$$

Per ipotesi, l'ultimo integrale è ben definito, cosicché la funzione definita da $D_v \tilde{f}_l^{\Leftarrow}(\xi)$

è olomorfa su C_{\rightleftharpoons} e la conclusione segue prendendo il limite $t \rightarrow 0$. \square

Corollario 2. *Se le ipotesi della proposizione 20 valgono qualunque sia $v \in T_{\xi}C^{\rightleftharpoons}$, e $\{e_k = \partial_k : k = 1, \dots, 2d\}$ è la base di $T_{\xi}C^{\rightleftharpoons}$ in una carta locale $U_{\xi} \subset C^{\rightleftharpoons}$ di ξ , allora $\partial_k \tilde{f}_l^{\rightleftharpoons}(\xi)$ è una funzione olomorfa qualunque sia $k = 1, \dots, 2d$ e*

$$\begin{aligned} \partial_k \tilde{f}_l^{\rightleftharpoons}(\xi) &= (-l - d + 1) \int_{X_d} [f(x)(x, e_k)](x, \xi)^{-l-d} d\sigma(x) \\ &= (-l - d + 1) \mathcal{F}_{l+1}^{\rightleftharpoons}[(x, e_k) f(x)] \end{aligned} \quad (3.76)$$

Il corollario che segue è una conseguenza immediata della proposizione 20 e del corollario 2, e può essere dimostrato semplicemente per induzione.

Corollario 3. *Sia $f(x)$ una funzione su X_d , che soddisfi le stesse ipotesi della proposizione 20, e \mathbf{p} sia un multi-indice in \mathbb{N}^{2d} , tale per cui $(x, \mathbf{e})^{\mathbf{p}} = (x, e_1)^{p_1} \dots (x, e_{2d})^{p_{2d}}$ e $\partial^{\mathbf{p}} = \partial_1^{p_1} \dots \partial_{2d}^{p_{2d}}$. Sia (3.59) ben definito per $(x, e_k)^m f(x)$, qualunque sia $m \leq n$. Allora le derivate di $\tilde{f}_l^{\rightleftharpoons}(\xi)$ fino all'ordine n sono fornite dalla seguente formula, in cui \mathbf{p} è assunto tale per cui $|\mathbf{p}| \leq n$.*

$$\begin{aligned} \partial^{\mathbf{p}} \tilde{f}_l^{\rightleftharpoons}(\xi) &= (-l - d + 1) \cdots (-l - d - |\mathbf{p}| + 2) \mathcal{F}_{l+|\mathbf{p}|}^{\rightleftharpoons}[(x, \mathbf{e})^{\mathbf{p}} f(x)] \\ &= (-1)^{|\mathbf{p}|} \frac{\Gamma(l + |\mathbf{p}| + d - 1)}{\Gamma(l + d)} \mathcal{F}_{l+|\mathbf{p}|}^{\rightleftharpoons}[(x, \mathbf{e})^{\mathbf{p}} f(x)] \end{aligned} \quad (3.77)$$

Corollario 4. *Se $f \in \mathcal{D}(X_d)$, $\tilde{f}_l^{\rightleftharpoons}(\xi)$ è una funzione olomorfa su C^{\rightleftharpoons} , e l'equazione (3.77) è valida per qualunque multi-indice $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^{2d}$.*

Dimostrazione. Dato qualunque $l \in \mathbb{N}$, la convergenza dell'integrale (3.59) è assicurata dalla proposizione (18) e dal fatto che f sia una funzione di classe \mathcal{C}^{∞} con supporto compatto. Così l'equazione (3.59) definisce una funzione analitica su C_{\rightleftharpoons} . Lo stesso può essere detto di $\mathcal{F}_{l+|\mathbf{p}|}^{\rightleftharpoons}[(x, \mathbf{e})^{\mathbf{p}} f(x)]$, dato qualunque $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^d$. \square

È utile notare, infine, come sussista una differenza sostanziale tra la trasformata di Fourier su X_d e quella naturale su \mathbb{M}_d . Se, infatti, in \mathbb{M}_d una funzione a quadrato sommabile può essere scomposta in maniera univoca sui quattro tubi, e

ciascuna delle funzioni che la scompongono è univocamente determinata tramite la sua trasformata di Fourier, questo non è il caso su X_d , se $d > 2$. Il caso di X_2 riveste, in questo senso, un ruolo del tutto particolare, poiché quando $d = 2$ gli spazi di de Sitter e di Anti-de Sitter risultano strettamente legati. In tali circostanze lo spazio ambiente può essere considerato essere lo spazio di Minkowski \mathbb{M}_3 e, oltre ai tuboidi chirali $\mathcal{T}^{\leftrightarrow}$, è possibile definire i *tuboidi lorentziani* $\mathcal{T}^{\pm} = T^{\pm} \cap X_2$, dove $T^{\pm} = \mathbb{M}_3 + iV^{\pm}$. Così, se $\mathcal{T}^{\leftrightarrow}$ emergono naturalmente nella trattazione di una teoria quantistica di campo su Anti-de Sitter, i loro corrispettivi nello spazio di de Sitter risultano essere i tuboidi \mathcal{T}^{\pm} . Allora una funzione $f(x)$ a quadrato sommabile su X_2 , soddisfacente opportune condizioni di regolarità all'infinito, può essere scomposta in maniera univoca in funzioni definite negli spazi di Hardy $H^2(\mathcal{T}^{\leftrightarrow})$ e $H^2(\mathcal{T}^{\pm})$. Inoltre, ciascuna funzione $g(x)$ in $H^2(\mathcal{T}^{\bullet})$ possiede un'unica trasformata di Fourier non banale, ed esiste una trasformazione inversa che permette di calcolare la funzione $G(z)$, olomorfa in \mathcal{T}^{\bullet} , il cui valore al bordo da \mathcal{T}^{\bullet} su X_2 sia $g(x)$, [11].⁴

⁴Con \mathcal{T}^{\bullet} intendiamo uno qualunque tra $\mathcal{T}^{\leftrightarrow}$ e \mathcal{T}^{\pm} .

Un'applicazione: decadimenti e vite medie

4.1 Funzioni a due punti: forma di Källen-Lehmann

Studiando l'approccio assiomatico alle teorie di campo su \mathbb{M}_d ci possiamo accorgere di come il postulato di positività per un insieme generale di funzioni di Wightman **w3** coinvolga contemporaneamente tutte le funzioni di qualunque grado siano, rendendo così impossibile la formulazione di una proprietà soddisfatta unicamente da $w_n(x_1, \dots, x_n)$, per qualche n . Tuttavia, le richieste **w1-w3**, prese assieme, implicano l'esistenza di una rappresentazione integrale ben precisa per le funzioni a due punti, detta *forma di Källen-Lehmann*. In particolare, se consideriamo il caso di un campo scalare hermitiano, troviamo che la trasformata di Fourier $\tilde{W}_2(p)$ della funzione $W_2(\zeta)$, definita come nel paragrafo 2.4.3, è una distribuzione invariante concentrata sul cono futuro chiuso $\overline{V^+}$. Inoltre, la condizione di positività implica che si abbia

$$\int \overline{f(x_1)} W_2(x_1 - x_2) f(x_2) d^d x_1 d^d x_2 \geq 0 \quad (4.1)$$

qualunque sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{M}_d)$, da cui, passando alla trasformata di Fourier, si ottiene (4.2).

$$\int \tilde{W}_2(p) |\tilde{f}(p)|^2 d^d p \geq 0 \quad (4.2)$$

In particolare, da (4.2) segue che

$$\tilde{W}_2(p) u(p) d^d p \geq 0 \quad (4.3)$$

data una funzione $u(p)$ non negativa in $\mathcal{S}(\mathbb{M}_d)$. Allora $\tilde{W}_2(p)$ è una distribuzione invariante con supporto in $\overline{V^-}$, e la forma più generale che può assumere è data da (4.4),

$$\tilde{W}_2(p) = (2\pi)^4 a \delta(p) + \int_0^\infty 2\pi \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) d\sigma(m^2) \quad (4.4)$$

dove $a \geq 0$ e $\sigma(\lambda)$ è una funzione monotona decrescente a crescita polinomiale. L'equazione (4.4) si traduce, invertendo la trasformazione di Fourier, in (4.5),

$$w_2(x, y) = W_2(x - y) = a - \int_0^\infty i G_m^{\text{ret}}(x - y) d\sigma(m^2) \quad (4.5)$$

che, a sua volta, conduce alla rappresentazione (4.6) per il commutatore degli operatori di campo.

$$(\Psi_0, [\phi(x), \phi(y)] \Psi_0) = -i \int_0^\infty G_{F,m}(x - y) d\sigma(m^2) \quad (4.6)$$

Le equazioni (4.5) e (4.4) forniscono le rappresentazioni integrali di Källén-Lehmann per la funzione a due punti e la sua trasformata di Fourier, rispettivamente, in termini delle funzioni di Wightman di un campo scalare libero generalizzato. Più in generale, se $w(z_1, z_2)$ è una distribuzione che soddisfa **w1** e **w2** (paragrafo 2.4.3), esiste una distribuzione temperata ρ in maniera tale per cui

$$w(z_1, z_2) = \int_{\mathbb{R}_+} \rho(m^2) w_2^{(m)}(z_1, z_2) dm^2 \quad (4.7)$$

dove $w_2^{(m)}(z_1, z_2)$ indica la funzione a due punti su \mathbb{M}_d di un campo scalare libero di Klein-Gordon. Inoltre, se vale **w3**, allora ρ è una distribuzione temperata positiva. In particolare, se consideriamo il prodotto di due funzioni di Wightman $w_2^{(m_1)}(x_1, x_2) w_2^{(m_2)}(x_1, x_2)$, questo può essere espresso in termini di una misura positiva ρ e della funzione a due punti $w_2^{(m)}(x_1, x_2)$ come in (4.8).

$$w_2^{(m_1)}(x_1, x_2) w_2^{(m_2)}(x_1, x_2) = \int_{(m_1+m_2)^2}^\infty \rho(m^2; m_1, m_2) w_2^{(m)}(x_1, x_2) dm^2 \quad (4.8)$$

Qualora si decida di ambientare la teoria di campo sull'universo di Anti-de Sitter, esiste una rappresentazione del tipo di Källén-Lehmann per una funzione $w(x_1, x_2)$ che soddisfi le medesime proprietà **AdS1**, **AdS2** e **AdS4** del paragrafo 3.4. L'esistenza di una simile rappresentazione è stata dimostrata nel caso generale da Düsedau e Freedman, [20], assieme ad un metodo generale per il calcolo dei pesi di Källén-Lehmann. La rappresentazione di Källén-Lehmann per un campo su X_d prende allora la forma (4.9),

$$w(z_1, z_2) = \sum_{l \in \mathbb{N}} \rho_l w_2^{(l)}(z_1, z_2) \quad (4.9)$$

che diviene (4.10) se si ambienta la QFT sul ricoprimento universale \tilde{X}_d di X_d .

$$w(z_1, z_2) = \int_0^\infty \rho(\lambda) w_2^{(\lambda)}(z_1, z_2) d\lambda \quad (4.10)$$

4.2 Campi interagenti e decadimenti

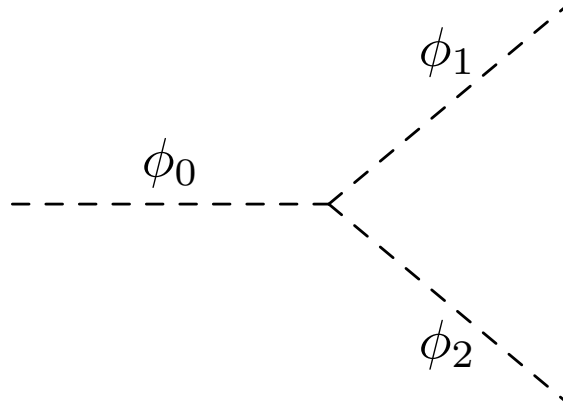


FIGURA 4.1. Decadimento di un campo ϕ_0 in ϕ_1 e ϕ_2

Considereremo, nel seguito, il decadimento di un campo scalare ϕ_0 in due altri campi indipendenti ϕ_1 e ϕ_2 , figura 4.1. Dal momento che, tuttavia, non è disponibile su X_d un analogo della teoria asintotica di Haag-Ruelle (HRT), sarà necessario adottare un punto di vista differente. In particolare, adotteremo il formalismo di Wigner, che interpreta gli stati a singola particella come stati in un sottospazio

invariante di uno spazio di Hilbert, nel quale la rappresentazione del gruppo G_0 si riduce ad una rappresentazione irriducibile. Inoltre, il decadimento del campo potrà essere studiato utilizzando la teoria delle perturbazioni al primo ordine. Lo stesso punto di vista può essere adottato per calcolare il tasso di decadimento per il medesimo processo nello spazio di Minkowski \mathbb{M}_d .

Considereremo allora un insieme di $N+1$ campi scalari indipendenti $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N$, agenti su uno spazio di Hilbert comune \mathcal{H} , che identifichiamo con il prodotto tensoriale dei rispettivi spazi di Fock.

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{j=0}^N \mathcal{F}^{(j)} \quad (4.11)$$

Dal momento che i campi sono supposti indipendenti, e, per il momento, non interagenti, abbiamo che le funzioni a due punti soddisfano (4.12).

$$(\Psi_0, \phi_j(x)\phi_k(y)\Psi_0) = \delta_{jk}w_2^{(m_j)}(x, y) \quad (4.12)$$

Il sottospazio $\mathcal{H}_{j_0, \dots, j_N}$ contenente esattamente j_k particelle del tipo k -simo è identificabile con il prodotto tensoriale $\mathcal{F}_{j_0}^{(0)} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{j_N}^{(N)} = \mathcal{H}_{j_0, \dots, j_N}$. Denoteremo con E_{j_0, \dots, j_N} il proiettore su tale sottospazio.

Possiamo ora inserire un termine d'interazione nel sistema in esame, e lo prendiamo della forma usuale (4.13),

$$\int_{\mathcal{X}} \gamma g(x)L(x)dx \quad (4.13)$$

dove $g(x)$ è una funzione regolare e a decrescita rapida su \mathcal{X} , e $L(x)$ è definito come il prodotto normalmente ordinato : $\phi_0(x)\phi_1^{q_1}(x) \dots \phi_N^{q_N}(x)$:, con $q_j \in \mathbb{N}$. Il limite adiabatico $g(x) \rightarrow 1$ dovrà essere preso dopo aver svolto i calcoli necessari.

Dunque, nel contesto della teoria delle perturbazioni, l'ampiezza di transizione tra due stati ψ_0 e ψ_1 , entrambi in \mathcal{H} è data da $\mathcal{A}_{\psi_0 \rightarrow \psi_1} = (\psi_0, S(\gamma g)\psi_1)$, dove $S(\gamma g)$

è fornito dalla serie formale (4.14).

$$S(\gamma g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{i^n \gamma^n}{n!} \int_{\mathcal{X}^n} T[L(x_1) \cdots L(x_n)] g(x_1) dx_1 \cdots g(x_n) dx_n \quad (4.14)$$

Pertanto, se ci concentriamo sull'espansione al primo ordine in γg otteniamo il risultato in (4.15).

$$\mathcal{A}_{\psi_0 \rightarrow \psi_1} = (\psi_0, iT_1(\gamma g)\psi_1) = i\gamma \left(\psi_0, \left[\int_{\mathcal{X}} g(x)L(x)dx \right] \psi_1 \right) \quad (4.15)$$

Ora, lo studio dei decadimenti del campo ϕ_0 può essere effettuato se si scelgono come stati ψ_0 e ψ_1 i vettori di \mathcal{H} esibiti in (4.16), dove f_0 e f_1 sono funzioni regolari (in realtà \mathcal{C}^∞) a decrescita rapida.

$$\begin{cases} \psi_0 = \int f_0(x)\phi_0(x)\Psi_0 dx \\ \psi_1 = \int f_1(x_{11}, \dots, x_{1q_1}, \dots, x_{N1}, \dots, x_{Nq_N}) : \prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^{q_j} \phi_j(x_{jk}) dx_{jk} : \Psi_0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Infatti il vettore ψ_0 genera il sottospazio $\mathcal{H}_{1,0,\dots,0}$ di \mathcal{H} , mentre gli stati del tipo ψ_1 generano $\mathcal{H}_{0,q_1,\dots,q_N}$. L'ampiezza di decadimento da uno stato in $\mathcal{H}_{1,0,\dots,0}$ a uno in $\mathcal{H}_{0,q_1,\dots,q_N}$ sarà allora data da (4.17), dove $q! = \prod_{j=1}^N q_j!$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\psi_0 \rightarrow \psi_1} &\equiv \Gamma = \frac{(\psi_0, T_1(\gamma g)E_{0,q_1,\dots,q_N}T_1^*(\gamma g)\psi_0)}{(\psi_0, \psi_0)} \\ &= \frac{q!\gamma^2}{(\psi_0, \psi_0)} \int \overline{f_0(x)} f_0(y) g(u) g(v) w_2^{(m_0)}(x, u) \left[\prod_{j=1}^N w_2^{(m_j)}(u, v)^{q_j} \right] \cdot \\ &\quad \cdot w_2^{(m_0)}(v, y) dx du dv dy \end{aligned} \quad (4.17)$$

Nel caso particolare in cui si studi il decadimento di un campo ϕ_0 in due campi ϕ_1

e ϕ_2 l'equazione (4.17) prende la forma (4.18).

$$\Gamma = \gamma^2 \left[\int \overline{f_0(x)} w_2^{(m_0)}(x, y) f_0(y) dx dy \right]^{-1} \int \overline{f_0(x)} g(u) g(v) f_0(y) w_2^{(m_0)}(x, u) w_2^{(m_1)}(u, v) w_2^{(m_2)}(u, v) w_2^{(m_0)}(v, y) dx du dv dy \quad (4.18)$$

4.3 Tassi di decadimento su \mathbb{M}_d

Il calcolo del tasso di decadimento di un campo ϕ_0 in due altri campi ϕ_1 e ϕ_2 può essere notevolmente semplificato nel caso dello spaziotempo di Minkowski utilizzando l'*identità di proiezione* (4.19), che può essere verificata per calcolo diretto.

$$\int_{\mathbb{M}_d} w_2^{(m_1)}(x, y) w_2^{(m_2)}(y, z) dy = 2\pi \delta(m_1^2 - m_2^2) w_2^{(m)}(x, z) \quad (4.19)$$

Per calcolare il limite adiabatico $g \rightarrow 1$ possiamo procedere in due passi successivi. Dapprima poniamo una delle due funzioni g pari a uno, per esempio $g(u) = 1$, prendendo solo in seguito il limite $g(v) \rightarrow 1$, di modo che il risultato finale non sia divergente. Inserendo dunque (4.19) in (4.18), e utilizzando la forma di Källén-Lehmann per il prodotto $w_2^{(m_1)}(u, v) w_2^{(m_2)}(u, v)$ otteniamo (4.20)

$$\Gamma_{\mathbb{M}_d} = q! L_1(f_0, g) \rho(m_0^2; m_1, m_2) \quad (4.20)$$

dove

$$L_1(f_0, g) = 2\pi \gamma^2 \left[\int \overline{f_0(x)} w_2^{(m_0)}(x, y) f_0(y) dx dy \right]^{-1} \int g(v) \overline{f_0(x)} w_2^{(m_0)}(x, v) w_2^{(m_0)}(v, y) f_0(y) dx dv dy \quad (4.21)$$

Il calcolo di $L_1(f_0, g)$ è allora reso più semplice, nello spazio di Minkowski, dall'utilizzo della trasformazione di Fourier, che ci permette di riscrivere L_1 nella

forma (4.22).

$$L_1(f_0, g) = (2\pi)^2 \gamma^2 \left[\int |\tilde{f}_0(p)|^2 \delta(p^2 - m_0^2) \theta(p^0) dp \right]^{-1} \int \overline{\tilde{f}_0(p)} \delta(p^2 - m_0^2) \theta(p^0) \tilde{f}_0(q) \delta(q^2 - m_0^2) \theta(q^0) \tilde{g}(p - q) dp dq \quad (4.22)$$

Per calcolare il tasso di decadimenti possiamo allora scegliere che $g(v)$ sia la funzione indicatrice di una fetta di spaziotempo di spessore T , ovvero $g(v) = h(t) = \theta(t + T/2)\theta(t - T/2)$, dividendo quindi il risultato ottenuto per T . Infine si dovrà prendere il limite $T \rightarrow \infty$. Si ottiene che il tasso di decadimenti dipende dal pacchetto f_0 , equazione (4.23), e questa è una caratteristica della QFT nello spazio di Minkowski \mathbb{M}_d che, come vedremo, non è condivisa dalla QFT nello spazio di Anti-de Sitter X_d .

$$R(f_0) = 2\pi \gamma^2 q! \left[\int |\tilde{f}_0(p)|^2 \delta(p^2 - m_0^2) \theta(p^0) dp \right]^{-1} \left[\int (2p^0)^{-1} |\tilde{f}_0(p)|^2 \delta(p^2 - m_0^2) \theta(p^0) dp \right] \rho(m_0^2; m_1, m_2) \quad (4.23)$$

Se, dunque, vogliamo calcolare il tasso di decadimento di una particella a riposo, potremo scegliere $f_0(x)$ in modo che $|\tilde{f}_0(p)|^2$ tenda a $\delta(p)$. Questo ci permette di ottenere l'equazione (4.24).

$$R_0 = \frac{\pi \gamma^2}{m_0} q! \rho(m_0^2; m_1, m_2) \quad (4.24)$$

Da ultimo, se studiamo il caso del decadimento di una particella di massa m_0 in due particelle identiche di massa m_1 , la funzione di Källén-Lehmann assume la forma (4.25).

$$\rho(m_0^2; m_1, m_1) = \theta(m_0^2 - 4m_1^2) \frac{(m_0^2 - 4m_1^2)^{(d-3)/2}}{(4\pi)^{(d-1)/2} 2^{d-2} \Gamma[(d-1)/2]} \quad (4.25)$$

In questo modo otteniamo il tasso di decadimento di una particella di massa m_0

in due particelle identiche di massa m_1 nella forma (4.26).

$$R_0 = \theta(m_0^2 - 4m_1^2) \frac{\pi\gamma^2}{m_0^2} \frac{(m_0^2 - 4m_1^2)^{(d-3)/2}}{(4\pi)^{(d-1)/2} 2^{d-3} \Gamma[(d-1)/2]} \quad (4.26)$$

4.4 Tassi di decadimento su X_d

Per poter studiare il decadimento di un campo ϕ_0 nell'universo di Anti-de Sitter, necessiteremo anzitutto di una generalizzazione dell'identità di proiezione. Consideriamo anzitutto la quantità (4.27).

$$\int_{X_d} w_2^{(l_1)}(z_1, u) w_2^{(l_2)}(u, z_2) d\sigma(u) \quad (4.27)$$

Se (4.27) convergesse (per esempio, uniformemente) ad una funzione $I^{(l_1, l_2)}(z_1, z_2)$, potremmo notare come questa soddisferebbe alcune proprietà tipiche delle funzioni a due punti. Anzitutto l'integrale (4.27) definirebbe una funzione di z_1 e z_2 , olomorfa in $\mathcal{T}^{\leftarrow} \times \mathcal{T}^{\rightarrow}$ e invariante sotto trasformazioni di G . Allora $I^{(l_1, l_2)}(z_1, z_2)$ sarebbe in realtà una funzione dello scalare invariante (z_1, z_2) , olomorfa in Θ_X . Inoltre, dal momento che $w_2^{(l_1)}(z_1, u)$ e $w_2^{(l_2)}(u, z_2)$ sono soluzioni (in senso distribuzionale) dell'equazione di Klein-Gordon, ciascuna in entrambe le proprie variabili, allora anche $I^{(l_1, l_2)}(z_1, z_2)$ ne sarebbe soluzione, e questo imporrebbe $I^{(l_1, l_2)}(z_1, z_2) = 0$ se $l_1 \neq l_2$. Allora, se $l_1 = l_2$ la funzione $I^{(l_1, l_1)}(z_1, z_2)$ sarebbe omogenea in entrambe le variabili, di grado l_1 in z_1 e di grado $-l_1 - d + 1$ in z_2 . Tali proprietà, nel caso $l_1 = l_2$, identificano la funzione di Wightman $w_2^{(l_1)}(z_1, z_2)$ a meno di un fattore costante, sicché possiamo concludere che, in caso di convergenza di (4.27), avremmo (4.28).

$$\int_{X_d} w_2^{(l_1)}(z_1, u) w_2^{(l_2)}(u, z_2) d\sigma(u) = \delta_{l_1, l_2} C_{l_1, d} w_2^{(l_1)}(z_1, z_2) \quad (4.28)$$

La convergenza dell'integrale (4.27) è allora di semplice dimostrazione se si utilizza la rappresentazione integrale (3.33) per $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$, che riportiamo di seguito.

$$w_2^{(l)}(z_1, z_2) = c_{l,d} \int_{\gamma(z_1)} (z_1, \xi)^l (\xi, z_2)^{-l-d+1} d\mu_{\gamma(z_1)}(\xi)$$

La proprietà di hermiticità, utilizzata nel paragrafo 3.5 per dimostrare la località delle funzioni a due punti, ci consente di scambiare l'ordine di integrazione, e di eseguire dapprima l'integrazione su X_d . Questa è ben definita in virtù della proposizione 15, e la proprietà di analiticità delle onde piane garantisce che il risultato sia una funzione olomorfa sui cicli d'integrazione. Di nuovo, le integrazioni sui cicli risultano ben definite grazie al risultato della proposizione 15 e otteniamo una funzione analitica in $\mathcal{T}^{\leftarrow} \times \mathcal{T}^{\rightarrow}$ di (z_1, z_2) (e la convergenza è uniforme). Riunendo le considerazioni precedenti possiamo dimostrare la proposizione 21.

Proposizione 21 (Identità di proiezione su X_d). *Siano $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ due interi tali per cui $l_1 + l_2 > 0$ e prendiamo due punti $z_1 \in \mathcal{T}^{\leftarrow}$ e $z_2 \in \mathcal{T}^{\rightarrow}$. Allora l'integrale (4.27) è convergente e definisce una funzione olomorfa di z_1 e z_2 in $\mathcal{T}^{\leftarrow} \times \mathcal{T}^{\rightarrow}$. Tale funzione risulta essere proporzionale ad una funzione a due punti per il campo scalare libero, equazione (4.28).*

Il calcolo di $C_{l,d}$ può essere svolto più agevolmente se ci si ricorda che le funzioni a due punti $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$ risultano essere proporzionali alle funzioni di Gegenbauer $D_l^{(d-1)/2}[(z_1, z_2)]$. La relazione (4.28) può essere equivalentemente riscritta in termini delle funzioni $D_l^{(d-1)/2}$, e indicheremo con $\tilde{C}_{l,d}$ il nuovo coefficiente di proporzionalità. Se prendiamo $z_1 = z_v = \bar{z}_2$ e parametrizziamo $u \in X_d$ come $u = [\sqrt{1+r^2} \sin \varphi, r\hat{\mathbf{r}}_u, \sqrt{1+r^2} \cos \varphi]$ la proprietà di hermiticità delle funzioni di Wightman ci consente di scrivere l'identità di proiezione per $D_l^{(d-1)/2}$ nella forma seguente,

$$\int_{X_d} |D_l^{(d-1)/2}[(z_v, u)]|^2 d\sigma(u) = \tilde{C}_{l,d} D_l^{(d-1)/2}[\cosh(2v)] \quad (4.29)$$

che diviene, esplicitando la misura invariante su X_d

$$\begin{aligned} S_{(d-1)} \int_0^\infty r^{d-2} dr \int_0^{2\pi} |D_l^{(d-1)/2}[\sqrt{1+r^2} \cos(\varphi - iv)]|^2 d\varphi = \\ = \tilde{C}_{l,d} D_l^{(d-1)/2}[\cosh(2v)] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Possiamo ora porre $a = e^v$, e entrambi i termini dell'equazione (4.30) sono analitici in un intorno dell'infinito. Espandendo al primo ordine in $1/a$ e identificando i coefficienti otteniamo l'equazione (4.31).

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{l,d} &= 2\pi^2 S_{d-1} \frac{\Gamma(l+d-1)}{\Gamma[(d-1)/2]\Gamma[n+(d+1)/2]} \int_0^\infty r^{d-2} (1+r^2)^{1-l-d} \\ &= 2\pi^2 S_{d-1} \frac{\Gamma(l+d-1)}{\Gamma[(d-1)/2]\Gamma[n+(d+1)/2]} \frac{\Gamma[(d-1)/2]\Gamma[l+(d-1)/2]}{\Gamma(l+d-1)} \\ &= \frac{4\pi^{(d+3)/2}}{(2l+d-1)\Gamma[(d-1)/2]} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Il passaggio da (4.30) a (4.31) è il frutto di integrazioni immediate effettuate dopo aver sviluppato $D_l^{(d-1)/2}[(z_v, u)]$ a partire dalla sua rappresentazione integrale costruita su (3.27).

Tornando dunque ai processi di decadimento, possiamo riprendere l'equazione (4.18). Come già nel caso minkowskiano, possiamo sostituire la forma di Källén-Lehmann per il prodotto $w_2^{(l_1)}(u, v)w_2^{(l_2)}(u, v)$, ottenendo così un'espansione di questo in termini dei pesi di Källén-Lehmann $\rho(l; l_1, l_2)$ e delle funzioni di Wightman $w_2^{(l)}(u, v)$. Possiamo allora procedere nuovamente in due passi, prendendo dapprima il limite $g(u) \rightarrow 1$ e applicando l'identità di proiezione all'integrale su X_d di $w_2^{(l_0)}(x, u)w_2^{(l)}(u, v)$, per poi prendere il limite $g(v) \rightarrow 1$ e semplificare l'integrale rimanente su X_d applicando l'identità di proiezione su $w_2^{(l)}(x, v)w_2^{(l_0)}(v, y)$. Otteniamo allora il risultato seguente.

$$\Gamma = \mathcal{A}_{\phi_0^{(l_0)} \rightarrow \phi_1^{(l_1)}, \phi_2^{(l_2)}} = \gamma^2 \frac{4\pi^2}{(2l_0 + d - 1)^2} \rho(l_0; l_1, l_2) \quad (4.32)$$

Il tasso di decadimenti potrà essere allora calcolato dividendo Γ per un qualche

“tempo totale” plausibile T_0 , ottenendo il risultato (4.33).

$$R = \frac{4\pi^2\gamma^2}{T_0(l_0 + d - 1)^2} \rho(l_0; l_1, l_2) \quad (4.33)$$

Rimane dunque da calcolare la funzione $\rho(l_0; l_1, l_2)$ dell’espansione di Källén-Lehmann, per poter fornire un risultato completo per la vita media di una particella ϕ_0 nell’universo di Anti-de Sitter. La soluzione, completamente non banale, può essere ottenuta a partire dal risultato in [15], che lega il prodotto di due funzioni di Gegenbauer del secondo tipo alla somma di funzioni $D_l^\lambda(z)$, pesate tramite coefficienti $\tilde{\rho}(l; m, n)$ come in (4.34)

$$D_m^\lambda(z)D_n^\lambda(z) = \sum_l \tilde{\rho}(l; m, n)D_l^\lambda(z) \quad (4.34)$$

dove

$$\tilde{\rho}(l; m, n) = \pi \frac{\alpha_\lambda(l + m - n)/2] \alpha_\lambda(l - m + n)/2] \alpha_\lambda(l + m + n)/2 + \lambda]}{\alpha_\lambda(l) \alpha_\lambda(l + \lambda)} \cdot \alpha_\lambda(l - m - n)/2 - \lambda] \quad (4.35)$$

e $\alpha_\lambda(l) = \Gamma(l + \lambda)/\Gamma(\lambda)\Gamma(l + 1)$. Dunque, ricordando che $w_2^{(l)}[(z_1, z_2)]$ è proporzionale ad una funzione di Gegenbauer del secondo tipo tramite un coefficiente $k_{l,d}$ (paragrafo 3.3), i coefficienti di Källén-Lehmann $\rho(l_0; l_1, l_2)$ potranno essere ricavati da $\tilde{\rho}(l_0; l_1, l_2)$ tramite l’equazione (4.36).

$$\rho(l_0; l_1, l_2) = \tilde{\rho}(l_0; l_1, l_2) \frac{k_{l_1,d} k_{l_2,d}}{k_{l_0,d}} \quad (4.36)$$

Notiamo, infine, che le proprietà di omogeneità delle funzioni di Wightman $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$ impongono delle restrizioni sui valori che può assumere l nel membro destro dell’espansione di Källén-Lehmann (4.37).

$$w_2^{(l_1)}(z_1, z_2)w_2^{(l_2)}(z_1, z_2) = \sum_l \rho(l; l_1, l_2)w_2^{(l)}(z_1, z_2) \quad (4.37)$$

La proprietà di omogeneità nella prima variabile, infatti, implica che, applicando (4.37) alla coppia $(z_1, -z_2)$, si abbia

$$\begin{aligned} w_2^{(l_1)}(-z_1, z_2)w_2^{(l_2)}(-z_1, z_2) &= \sum_l \rho(l; l_1, l_2)w_2^{(l)}(-z_1, z_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow (-1)^{l_1+l_2}w_2^{(l_1)}(z_1, z_2)w_2^{(l_2)}(z_1, z_2) &= \sum_l \rho(l; l_1, l_2)(-1)^l w_2^{(l)}(z_1, z_2) \end{aligned} \quad (4.38)$$

da cui otteniamo che $l = l_1 + l_2 + 2k$, con $k \in \mathbb{N}$. La proprietà di omogeneità nella seconda variabile implica invece

$$\begin{aligned} w_2^{(l_1)}(z_1, -z_2)w_2^{(l_2)}(z_1, -z_2) &= \sum_l \rho(l; l_1, l_2)w_2^{(l)}(z_1, -z_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow (-1)^{2-2d-l_1-l_2}w_2^{(l_1)}(z_1, z_2)w_2^{(l_2)}(z_1, z_2) &= \sum_l \rho(l; l_1, l_2)(-1)^{1-d-l}w_2^{(l)}(z_1, z_2) \end{aligned} \quad (4.39)$$

da cui si ha che l debba essere della forma $l = l_1 + l_2 + d - 1 + 2k$, se k assume valori naturali. Di tali restrizioni prevale la seconda, e questo fa sì che la somma nell'espansione di Källen-Lehmann inizi dal valore di l fornito da $k = 0$, ossia $l \geq l_1 + l_2 + d - 1$. Questo fatto evidenzia come la condizione spettrale soddisfatta dalle funzioni a due punti traduca nello spaziotempo di Anti-de Sitter una condizione di vera e propria positività per l'energia.

Conclusioni

Lo studio della geometria dello spaziotempo di Anti-de Sitter ha permesso anzitutto di dimostrare come le geodetiche temporali in X_d possano essere individuate univocamente per mezzo di una coppia di vettori del cono complesso $C^{(C)}$ non solo nel caso bidimensionale, ma anche nel caso generale d -dimensionale. Per far questo, tuttavia, è stato necessario introdurre il concetto di sottovarietà totalmente geodetica, e dimostrare che le intersezioni di tutti gli iperpiani della forma $(k, x) = 0$ con X_d sono totalmente geodetiche. Inoltre, la corrispondenza tra teorie quantistiche nel limite classico e geodetiche per mezzo dell'approssimazione iconale, e la sua applicazione al caso delle onde piane su X_d , ha consentito l'identificazione del vettore $\xi \in C^{(C)}$ utilizzato per parametrizzare le varie soluzioni all'equazione di Klein-Gordon con il momento di una corrispondente particella muoventesi lungo una geodetica di X_d .

Inoltre, lo studio dell'approccio algebrico e assiomatico alle teorie quantistiche dei campi su \mathbb{M}_d ha consentito la giustificazione della generalizzazione ad un approccio assiomatico di tipo Wightman su X_d . Utilizzando tale formalismo, è stato possibile individuare in

$$w_2^{(l)}(z_1, z_2) = c_{l,d} \int_{\gamma(z)} (z_1, \xi)^l (\xi, z_2)^{-l-d+1} d\mu_{\gamma(z)}(\xi)$$

un candidato per la funzione a due punti di un campo scalare su X_d , e la determinazione del fattore di proporzionalità $c_{l,d}$ è stata effettuata imponendo la validità della condizione di Hadamard circa il comportamento delle funzioni a due punti nel limite di coincidenza. La verifica delle condizioni imposte dagli assiomi di Wightman ha quindi avvalorato tale ipotesi. Inoltre, nel corso della verifica della condizione

di positività per $w_2^{(l)}(z_1, z_2)$ è stato possibile fornire una rappresentazione integrale per $(x, \xi)^l$, della forma

$$(z, \xi)^l \propto \int_{\gamma(\xi)} (\xi, \xi')^l (\xi', z)^{-l-d+1} d\mu_{\gamma(\xi)}(\xi')$$

Tali considerazioni hanno permesso anche di definire una trasformazione di tipo Fourier su X_d , che mappi funzioni $f(x) \in \mathcal{D}(X_d)$ in funzioni (olomorfe) limitate sui coni chirali C_{\rightleftharpoons} , proposizione 19 e corollario 2. Purtroppo non appare essere disponibile un risultato di decomposizione olomorfa sui domini tuboidali delle funzioni definite su X_d se $d \geq 2$.

Infine, la rappresentazione integrale della funzione a due punti ha permesso di dimostrare semplicemente un'identità di proiezione analoga a quella nota su spazio di Minkowski, e questa, assieme all'espressione nota dell'espansione di Källén-Lehmann del prodotto di due funzioni a due punti ha consentito il calcolo della vita media di una particella in X_d nei confronti del decadimento in due altre particelle in una approssimazione perturbativa al primo ordine.

Bibliografia

- [1] R. Askey, *Orthogonal Polynomials and Special Functions*, SIAM, 1975
- [2] S. J. Avis, C. J. Isham e D. Storey, *Phys. Rev. D* **18** (1978) 3565
- [3] H. Bateman, *Higher Transcendental Functions*, Vol. I, Mc Graw Hill, New York 1954
- [4] M. Bertola, J. Bros, U. Moschella e R. Schaeffer, [hep-th/9908140].
- [5] N. D. Birrell e P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, 1984
- [6] N. N. Bogolubov, A. A. Logunov, A. I. Oksak e I. Todorov, *General Principles of Quantum Field Theory*, Springer, 1989
- [7] A. Boutet de Monvel, D. Bucholz, D. Iagolnitzer e U. Moschella (eds.), *Rigorous Quantum Field Theory. A Festschrift for Jacques Bros*, Birkhäuser, 2007
- [8] J. Bros e U. Moschella, *Rev. Math. Phys.* **8** (1996) 327
doi:10.1142/S0129055X96000123 [gr-qc/9511019].
- [9] J. Bros, H. Epstein e U. Moschella, *Commun. Math. Phys.* **196** (1998) 535
doi:10.1007/s002200050435 [gr-qc/9801099].
- [10] J. Bros, H. Epstein e U. Moschella, *Commun. Math. Phys.* **231** (2002) 481
doi:10.1007/s00220-002-0726-z [hep-th/0111255].
- [11] J. Bros e U. Moschella, math-ph/0311052.

- [12] J. Bros, H. Epstein e U. Moschella, JCAP **0802** (2008) 003 doi:10.1088/1475-7516/2008/02/003 [hep-th/0612184].
- [13] J. Bros, H. Epstein e U. Moschella, Annales Henri Poincare **11** (2010) 611 doi:10.1007/s00023-010-0042-7 [arXiv:0812.3513 [hep-th]].
- [14] J. Bros, H. Epstein, M. Gaudin, U. Moschella e V. Pasquier, Commun. Math. Phys. **295** (2010) 261 doi:10.1007/s00220-009-0875-4 [arXiv:0901.4223 [hep-th]].
- [15] J. Bros, H. Epstein, M. Gaudin, U. Moschella e V. Pasquier, Commun. Math. Phys. **309** (2012) 255 doi:10.1007/s00220-011-1372-0 [arXiv:1107.5161 [hep-th]].
- [16] C. G. Callan e F. Wilczek, Nucl. Phys. B **340** (1990) 366
- [17] C. Charmousis, *Introduction to Anti de Sitter Black Holes* in *From Gravity to Thermal Gauge Theories: The AdS/CFT Correspondence*, Berlino, Springer, 2011
- [18] L. J. Chu e J. A. Stratton, J. Math. and Phys. **20** (1941) 259
- [19] H. Epstein e U. Moschella, Commun. Math. Phys. **336** (2015) no.1, 381 doi:10.1007/s00220-015-2308-x [arXiv:1403.3319 [hep-th]].
- [20] D. W. Dusedau e D. Z. Freedman, Phys. Rev. D **33** (1986) 389
- [21] D. W. Dusedau e D. Z. Freedman, Phys. Rev. D **33** (1986) 395
- [22] F. J. Dyson, Phys. Rev. **83** (1951) 608
- [23] F. J. Dyson, Phys. Rev. **85** (1952) 631
- [24] P. Eymard, J. Faraut, G. Schiffmann e R. Takahashi, *Analyse Harmonique sur les Groupes de Lie*, Berlino, Springer, 1975

- [25] R. Feynman, Phys. Rev. **76** (1949) 769
- [26] C. J. Fewster e A. Higuchi, Class. Quant. Grav. **13** (1996) 51 doi:10.1088/0264-9381/13/1/006 [gr-qc/9508051].
- [27] C. Fronsdal, Phys. Rev. D **10** (1974) 589
- [28] I. M. Gel'fand e M. A. Naimark, Math. Sbornik **12** (1943) 197
- [29] I. M. Gel'fand e G. E. Shilov, *Generalized Functions. Volume I: Properties and Operations*, Boston, MA: Academic Press, 1964
- [30] I. M. Gel'fand, M. I. Graev e N. Ya. Vilenkin, *Generalized Functions. Volume V: Integral Geometry and Representation Theory*, Boston, MA: Academic Press, 1964
- [31] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications*, Dover Publications, 2006
- [32] R. Haag, *Discussion des "axiomes" et de propriétés asymptotiques d'une théorie des champs locale avec particules composées* in *Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs*, Lille, 1957
- [33] R. Haag, Phys. Rev. **112** (1958) 669
- [34] R. Haag e B. Schroer, Nuovo Cimento **25** (1962) 287
- [35] R. Haag e D. Kastler, J. Math. Phys. **5** (1964) 848
- [36] R. Haag, *Local Quantum Physics. Fields, Particles, Algebras*, Berlino, Springer-Verlag, 1996
- [37] S. Hollands e R. M. Wald, Commun. Math. Phys. **293** (2010) 85 doi:10.1007/s00220-009-0880-7 [arXiv:0803.2003 [gr-qc]].
- [38] A. Ishibashi e R. M. Wald, Class. Quant. Grav. **20** (2003) 3815 doi:10.1088/0264-9381/20/16/318 [gr-qc/0305012].

- [39] A. Ishibashi e R. M. Wald, *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 2981
doi:10.1088/0264-9381/21/12/012 [hep-th/0402184].
- [40] R. V. Kadison e J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras.*, Berlino, Springer-Verlag, 1991
- [41] B. S. Kay, *Rev. Math. Phys.* **12** (1992) 167 doi:10.1142/S0129055X92000194,
full-text available at: https://www.researchgate.net/profile/Bernard_Kay/publication/234525000_The_Principle_of_Locality_and_Quantum_Field_Theory_on_non_Globally_Hyperbolic_Curved_Spacetimes/links/0c96052d3d9a91923c000000.pdf/download?version=vs
- [42] B. S. Kay, presented at: *Conference on Operator Algebras and Quantum Field Theory*, Rome, Italy – gr-qc/9704075
- [43] W. P. A. Klingenberg, *Riemannian Geometry*, Berlino, W. de Gruyter, 1995
- [44] B. O’Neill, *Semi-Riemannian Geometry: with Applications to Relativity*, New York, Academic Press, 1983
- [45] J. M. Maldacena, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113 [Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231] doi:10.1023/A:1026654312961 [hep-th/9711200].
- [46] U. Moschella, *The de Sitter and anti-de Sitter Sightseeing Tour in Einstein, 1905–2005*, Berlino, Springer, 2006
- [47] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw Hills Series in Higher Mathematics, McGraw Hills, 2006
- [48] W. de Sitter, *Proc. Kon. Ned. Acad. Wet.* **19** (1917) 1217
- [49] W. de Sitter, *Proc. Kon. Ned. Acad. Wet.* **20** (1917) 229
- [50] I. E. Segal, *Bull. Am. Math. Soc.* **53** (1947) 73

- [51] R. F. Streater e A. A. Wightman, *PCT, Spin and Statistics and All That*, New York, Benjamin, 1964
- [52] F. Strocchi, *An Introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics. A Short Course for Mathematicians*, Advanced Series in Mathematical Physics Vol. 28, World Scientific, 2008
- [53] F. Strocchi, *An Introduction to Non-Perturbative Foundations of Quantum Field Theory*, Oxford University Press, 2013
- [54] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. XXIII, Providence, 1975
- [55] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, 1984
- [56] R. M. Wald, *Quantum field theory in curved space-time and black hole thermodynamics*, The University of Chicago Press, 1994